Distributionentheorie
Vorlesungsnotizen

Stilianos Louca

Dezember 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Motivation

1.1.1 Vertauschung von Grenzwerten und Integralen

Betrachten die Treppenfunktionen

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{n}{2} & : |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw. Dreieck-Funktionen

$$g_n(x) := \begin{cases} -n^2x + n & : 0 < x < \frac{1}{n} \\ n^2x - n & : -\frac{1}{n} < x \leq 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

bzw. Gaußfunktionen

$$h_n(x) := n \cdot e^{-\pi n^2 x^2}$$

für $n \in \mathbb{N}$. In allen 3 Fällen gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)\ dx = \int\limits_{\mathbb{R}} g_n(x)\ dx = \int\limits_{\mathbb{R}} h_n(x)\ dx = 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) = \begin{cases} \infty & : x = 0 \\ 0 & : x \neq 0 \end{cases}$$

Jedoch

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)\ dx}_{1} \neq \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ dx}_{0}$$

(analog auch g_n und h_n), das heißt Grenzwert und Integral sind nicht Vertauschbar! Gesucht ist nun ein anderer Konvergenzbegriff für Funktionen, in dessem Kontext solche Vertauschungen Sinn machen.

Als Beispiel sei eine stetige Funktion $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ gegeben. Dann gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_n\varphi\ dx \overset{\Phi = \int \varphi\ dx}{=} \frac{n}{2}\left[\Phi\left(\frac{1}{n}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{n}\right)\right] = \Phi(\xi_n)$$

für irgendein $\xi_n \in B_{\frac{1}{n}}(0)$. Somit

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n\varphi\ dx = \varphi(0)$$

was zu einem geeigneten Konvergenzbegriff von f_n Anlass gegeben könnte.

1.1.2 Lösungsräume von DGL

Betrachten die Differentialgleichung

$$LU = f$$

in U mit dem Differentialoperator L. Die Existenz einer Lösung setzt oft zu hohe Forderungen an L bzw. f, so dass eine Einführung eines *schwächeren* Lösungsbegriffs zweckmäßig ist. So kann z.B. die DGL verallgemeinert werden auf

$$\int (LU)\cdot\varphi\ dx = \int f\cdot\varphi\ dx \quad \forall\ \varphi \in \Phi$$

für geeigneten Grundraum Φ von Funktionen, was zu einem größeren Lösungsraum führen kann.

1.1.3 Mittelungen

Betrachen die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ auf dem messbaren Raum $(M, \mathcal{M})$, z.B. *Temperaturverteilung auf* M. Stellt man sich nun die *Messung* von f in $x_0 \in M$ als eine Art *Mittelung* in einer Umgebung von x_0 vor (*Thermometer* hat nicht-verschwindende Größe), so kann diese Beschrieben werden durch ein, das Verhalten vom Thermometer charakterisierendes, Wahrscheinlichkeitsmaß μ_{x_0}, *konzentriert um* x_0:

$$\langle f \rangle_{\mu_{x_0}} = \int\limits_M f \; d\mu_{x_0}$$

Im allgemeinen kann jedoch f nicht einfach aus den Werten $\langle f \rangle_{\mu_x}$ bestimmt werden. Alternativ kann man sich f als lineares Funktional auf irgendeinen Raum $\mathfrak{M}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen angesehen werden:

$$f : \mu \mapsto \int\limits_M f \; d\mu \quad , \quad \mu \in \mathfrak{M}$$

Ist das verhalten von f in $\mathfrak{M}$ als solches bekannt, so kann manchmal (falls $\mathfrak{M}$ groß genug) auch das Verhalten von $f : M \to \mathbb{R}$ bestimmt werden.

1.1.4 Fouriertransformationen

Betrachten die Fouriertransformation

$$\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}) \to L_1(\mathbb{R})$$

definiert durch

$$\mathcal{F}(f)(k) := \widetilde{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixk} f(x) \; dx$$

Eine Invertierung von $\mathcal{F}$ ist im allgemeinen nicht möglich. Ist jedoch $f \in L_1$ noch zusätzlich differenzierbar in x_0 und $\widetilde{f} \in L_1$, dann

$$f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \widetilde{f}(k) \; dk$$

Dies ist leider oft eine zu hohe Anforderung an die *Testfunktionen* f, was eine Entfernung vom Begriff der punktweise Betrachtung motiviert.

1.2 Topologische Vorbetrachtungen

1.2.1 Definition: Ausschöpfungsfolge

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ eine Folge offener Mengen, mit:

1. $\Omega = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} \Omega_j$
2. $\overline{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1}$
3. $\overline{\Omega}_j$ kompakt ($\Leftrightarrow$ beschränkt)

Dann heißt $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *Ausschöpfungsfolge* von Ω.

1.2.2 Lemma: Transformation von Ausschöpfungsfolgen

Seien $\Omega', \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\tau : \Omega \to \Omega'$ homöomorph[1]. Ist $\Omega_1, \Omega_2, ..$ eine Ausschöpfungsfolge von Ω, so ist $\tau(\Omega_1), \tau(\Omega_2), ..$ eine Ausschöpfungsfolge von Ω'.

[1] Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ heißt *homöomorph* wenn sie bijektiv ist mit f, f^{-1} stetig.

Beweis: Da τ^{-1} stetig ist, sind die $\tau(\Omega_j)$ offen und die $\tau(\overline{\Omega}_j)$ abgeschlossen. Wegen $\tau(\Omega_j) \subset \tau(\overline{\Omega}_j)$ und

$$\overline{\tau(\Omega_j)} \overset{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{\tau(\Omega_j)\subset A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$$

ist $\overline{\tau(\Omega_j)} \subset \tau\left(\overline{\Omega}_j\right)$, also

$$\overline{\tau(\Omega_j)} \subset \tau\left(\overline{\Omega}_j\right) \subset \tau(\Omega_{j+1}) \quad \text{(Bedingung 2)}$$

Da τ stetig ist, sind die $\tau(\overline{\Omega}_j)$ auch kompakt (also insbesondere beschränkt), das heißt auch $\overline{\tau(\Omega_j)}$ sind beschränkt, sprich kompakt (Bedingung 3). Offensichtlich

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \tau(\Omega_j) = \tau\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j\Big) = \tau(\Omega) = \Omega' \quad \text{(Bedingung 1)}$$

□

1.2.3 Lemma: Existenz von Ausschöpfungsfolgen

Zu jeder offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ existiert eine Ausschöpfungsfolge $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

Beweis: Die offenen Kugeln mit positivem, rationalem Radius und Zentrum in $\mathbb{Q}^n$:

$$\{B^o_\varepsilon(q) : q \in \mathbb{Q}^n,\ 0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$$

bilden bekanntlich eine Basis der Topologie in $\mathbb{R}^n$, so dass

$$\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B^o_{\varepsilon_i}(q_i)$$

für irgendeine Folge $(q_i, \varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q},\ \varepsilon_i > 0$. Die Folge

$$\Omega_k := \underbrace{\bigcup_{i=1}^{k} B^o{}_{\frac{\varepsilon_i}{1+\frac{1}{k}}}(q_i)}_{\text{offen, beschränkt}} \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

ist dann eine Abschöpfungsfolge von Ω, da offensichtlich $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$ und

$$\overline{\Omega}_k = \bigcup_{i=1}^{k} \underbrace{\overline{B^o{}_{\frac{\varepsilon_i}{1+\frac{1}{k}}}(q_i)}}_{B_{\frac{\varepsilon_i}{1+\frac{1}{k}}}(q_i)} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B^o{}_{\frac{\varepsilon_i}{1+\frac{1}{k+1}}}(q_i) = \Omega_{k+1}$$

□

1.2.4 Definition: Induzierte Topologie in Untermenge

Die Topologie $\mathscr{O}(T)$ eines topologischen Raumes T induziert in jeder Untermenge $\Omega \subset T$ die Topologie

$$\mathscr{O}(\Omega) := \Omega \cap \mathscr{O}(T) := \{\Omega \cap U : U \in \mathscr{O}(T)\}$$

in Ω, die sogenannte *Schnitttopologie*. Eine Menge $A \subset \Omega$ heißt dementsprechend *offen in* Ω, falls $A \in \mathscr{O}(\Omega)$.

Bemerkungen:

(i) Ist (T, d) ein metrischer Raum und $\mathscr{O}(T)$ induziert durch die Metrik d, so ist $(\Omega, d\mid_\Omega)$ ebenfalls ein metrischer Raum, und die Einschränkung $d\big|_\Omega$ induziert auf Ω genau die Schnitttopologie.

(ii) Ist Ω offen, so ist $\mathscr{O}(\Omega) \subset \mathscr{O}(T)$. Insbesondere sind für $A \subset \Omega$ Offenheit in Ω und in T äquivalent.

(iii) Ist $A \subset T$ abgeschlossen, so ist auch $A \cap \Omega$ abgeschlossen in Ω.
Beweis: Ist $A = T \setminus U$ mit $U \in \mathscr{O}(T)$, so ist $A \cap \Omega = \Omega \setminus \underbrace{(\Omega \cap U)}_{\in \mathscr{O}(\Omega)}$.

(iv) Ist Ω abgeschlossen, so ist für $A \subset \Omega$ Abgeschlossenheit in $(\Omega, \mathscr{O}(\Omega))$ äquivalent zu Abgeschlossenheit in $(T, \mathscr{O}(T))$.
Beweis: Nach (iii) ist Richtung "$\Leftarrow$" trivial. Ist anderseits $A = \Omega \setminus (\Omega \cap U)$ für ein $U \in \mathscr{O}(T)$, dann ist $A = \Omega \cap U^c$ als Schnitt in T abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen.

(v) Eine Menge $K \subset \Omega$ ist genau dann Kompakt in $(\Omega, \mathscr{O}(\Omega))$ wenn sie auch in $(T, \mathscr{O}(T))$ kompakt ist.
Beweis: Ist einerseits K kompakt in Ω und $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i,\ U_i \in \mathscr{O}(T)$ so ist auch

$$K \subset \bigcup_{i\in I} \underbrace{U_i \cap \Omega}_{\in \mathscr{O}(\Omega)}$$

das heißt für endlich viele $i_1, .., i_n \in I$:

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} \cap \Omega \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$$

Ist anderseits K kompakt in T und $K = \bigcup_{i\in I} U_i,\ U_i = \underbrace{\widetilde{U}_i}_{\in \mathscr{O}(T)} \cap \Omega \in \mathscr{O}(\Omega)$ so ist auch

$$K \subset \bigcup_{i\in I} \widetilde{U}_i$$

das heißt für endlich viele $i_1, .., i_n \in I$:

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \widetilde{U}_{i_k} \overset{K\subseteq\Omega}{\Longrightarrow} K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{\widetilde{U}_{i_k} \cap \Omega}_{\in \mathscr{O}(\Omega)}$$

(vi) Nach (v) ist insbesondere Ω genau dann Kompakt in $(T, \mathscr{O}(T))$, wenn Ω in $(\Omega, \mathscr{O}(\Omega))$, das heißt als topologischer Raum, kompakt ist.

(vii) Ist T kompakt und Ω abgeschlossen in $(T, \mathscr{O}(T))$, so ist auch Ω kompakt.
Beweis: Ist $(U_i)_{i\in I} \subset \mathscr{O}(T)$ eine offene Überdeckung von Ω, so ist $\underbrace{T \setminus \Omega}_{\Omega^c \in \mathscr{O}(T)}, (U_i)$ eine offene Überdeckung von T. Es existiert also eine endliche Überdeckung

$$T \subset \Omega^c \cup \bigcup_{n=1}^{N} U_{i_n}$$

von T. Insbesondere ist

$$\Omega \subset \bigcup_{n=1}^{N} U_{i_n}$$

eine endliche Überdeckung von Ω.

(viii) Ähnlich: Ist $\Omega \subseteq T$ kompakt und $A \subseteq \Omega$ abgeschlossen (in T), so ist A kompakt.
Beweis: Nach (iii) ist A auch abgeschlossen in Ω. Nach (vii) folgt die Behauptung.

1.2.5 Definition: Präkompaktheit

Ein metrischer Raum (Ω, ρ) heißt *Präkompakt*, oder *total beschränkt*, falls:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, x_1, .., x_n \in \Omega : \Omega \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon^o(x_k)$$

das heißt Ω kann durch endlich viele Kugeln mit beliebig kleinem Radius ε überdeckt werden. Die Zentren solch einer Überdeckung nennt man *ε-Netz*.

Bemerkungen:

(i) Ist Ω kompakt, so ist er auch vollständig.

(ii) Ist Ω kompakt, so ist er auch Präkompakt, denn für $\varepsilon > 0$ ist $(B_\varepsilon^o(x))_{x\in\Omega}$ eine offene Überdeckung von Ω. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht!

(iii) Ist Ω Präkompakt, so ist er insbesondere beschränkt, d.h.

$$\exists\, R > 0 : d(x, y) \leq R\ \forall\, x, y \in \Omega$$

(iv) Ist Ω präkompakt und vollständig, so ist Ω kompakt.

Beispiel: Die Menge $(0, 1]$ mit der Metrik $d(x, y) := |x - y|$ ist präkompakt denn für $\varepsilon > 0$ (dazu l_0 mit $2^{-l_0} < \varepsilon$) ist

$$(0, 1] = \bigcup_{l=1}^{2^{l_0}-1} B_\varepsilon^o\left(\frac{l}{2^{l_0}}\right)$$

Jedoch ist $(0, 1]$ nicht vollständig und demnach nicht kompakt.

1.3 Grundräume von Testfunktionen

1.3.1 Notationen

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\langle x \rangle := \sqrt{1 + |x|^2}$$

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Für $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ schreiben wir

$$D^\alpha \varphi := (-i)^{|\alpha|} \cdot \underbrace{\frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}}_{\partial^\alpha \varphi} \ ,\quad |\alpha| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \ ,\ \alpha! := \prod_{j=1}^{n} \alpha_j! \ ,\quad x^\alpha := \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}$$

und setzen $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ als den linearen Raum aller glatten, komplexen Funktionen in $\mathbb{R}^n$.

1.3.2 Definition: Schwartz-Raum

Die Funktionenmenge

$$S(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \|\varphi\|_{k,l} := \sup_x \left\{ \langle x \rangle^l \sum_{|\alpha|\le k} |D^\alpha \varphi(x)| \right\} < \infty \quad \forall\, k,l \in \mathbb{N}_0 \right\} \tag{1.3.2.1}$$

heißt *Schwartz-Raum über* $\mathbb{R}^n$.

Beispiele:

- Polynome gehören nicht zu $S(\mathbb{R}^n)$.
- Die Gaußsche Funktion $e^{-\|x\|^2/2}$ gehört zu $S(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkungen:

(i) $S(\mathbb{R}^n)$ ist ein linearer Raum.

(ii) Für $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$ ist auch $\varphi \cdot \psi \in S(\mathbb{R}^n)$, denn

$$\|\partial^\alpha(\varphi\psi)\|_{k,l} \le C_k \|\varphi\|_{k,0} \|\psi\|_{k,l}$$

(Beweis analog zu 1.3.6 Bemerkung (ii)).

(iii) Für $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ und Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist auch $\partial^\alpha \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

(iv) Für $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ und Polynom $Q(x) = \sum_{|\alpha|\le m} \lambda_\alpha x^\alpha$ ist auch $Q \cdot \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, denn

$$|Q(x)| \in \mathcal{O}(x^{|\alpha|}) \;\Rightarrow\; \|Q\varphi\|_{k,l} \le C_k \cdot \mathrm{const}_m \cdot \|\varphi\|_{k,l+m}$$

(Rechnung ähnlich zu 1.3.6 Bemerkung (ii)).

(v) Es ist $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ genau dann wenn $\left\|x^\beta \partial^\alpha \varphi\right\|_\infty < \infty$ gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.
Eine analoge Aussage gilt auch für die $\left\|\partial^\alpha(x^\beta \varphi)\right\|_\infty$.
Beweis: Richtung "⇒ folgt aus Bemerkungen (iii) und (iv).
Richtung "⇐" folgt aus

$$\left(1 + \|x\|^2\right)^{\frac{l}{2}} |\partial^\alpha \varphi(x)| \overset{\substack{x \\ \text{groß} \\ \text{genug}}}{\le} \mathrm{const} \cdot \sum_{j=1}^n \underbrace{\left|x_j^l \partial^\alpha \varphi(x)\right|}_{\le \left\|x_j^l \partial^\alpha \varphi\right\|_\infty} \le \mathrm{const}_{\alpha,l,\varphi} < \infty$$

$$\Rightarrow \; \|\varphi\|_{k,l} \le \mathrm{const}_{l,\varphi} < \infty$$

Da $\partial^\alpha(x^\beta\varphi)$ stets als Summe von Termen der Form $x^*\partial^*\varphi$ geschrieben werden kann, folgt die Behauptung auch im Falle dass $\left\|\partial^\alpha(x^\beta\varphi)\right\|_\infty < \infty \;\; \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ ist.

1.3.3 Topologische Aspekte von $S(\mathbb{R}^n)$

Die Abbildungen $\|\cdot\|_{k,l}$ stellen auf $S(\mathbb{R}^n)$ halbnormen dar. Ferner ist $S(\mathbb{R}^n)$ metrisierbar durch die Metrik

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{k,l \in \mathbb{N}_0} \frac{\|\varphi - \psi\|_{k,l}}{1 + \|\varphi - \psi\|_{k,l}} \cdot \frac{1}{2^{k+l}}$$

und bzgl. dieser sogar vollständig und lokal konvex, das heißt ein Frechet-Raum. Alternativ kann man den Konvergenzbegriff

$$\varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \;:\Leftrightarrow\; \|\varphi_\nu - \varphi\|_{k,l} \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;\; \forall\, k, l$$

einführen, der, wie sich herausstellt, äquivalent zu dem durch d erzeugten Konvergenzbegriff ist.

Bemerkung: Ähnlich zu Bemerkung (v) in 1.3.2 geht $\varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ genau dann wenn

$$\left\| x^\alpha \partial^\beta (\varphi_\nu - \varphi) \right\|_\infty \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$$

und genau dann wenn

$$\left\| \partial^\beta (x^\alpha (\varphi_\nu - \varphi)) \right\|_\infty \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$$

1.3.4 Bemerkung: Der Schwartzraum als Einbettung im L_p

Wegen

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|^p \langle x \rangle^{lp}}{\langle x \rangle^{lp}} \, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\varphi\|_{0,l}^p}{\langle x \rangle^{lp}} \, dx \le \|\varphi\|_{0,l}^p \cdot \mathrm{vol}(S^n) \cdot \underbrace{\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\frac{lp}{2}}} \, dr}_{\substack{<\infty \\ \text{für } n<lp}} \quad , \quad 0 < p < \infty$$

ist

$$S(\mathbb{R}^n) \subseteq L_p(\mathbb{R}^n) \quad , \quad 0 < p \le \infty$$

Aus der Rechnung ist außerdem ersichtlich: Gehen $\varphi_\nu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ in $S(\mathbb{R}^n)$, so gehen auch $\varphi_\nu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ in $L_p(\mathbb{R}^n)$, das heißt

$$\boxed{S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_p(\mathbb{R}^n) \quad , \quad 0 < p \le \infty} \tag{1.3.4.1}$$

Es kann sogar gezeigt werden: $S(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L_2(\mathbb{R}^n)$.

1.3.5 Definition: $\left(\mathcal{C}^\infty(\Omega), (\|\cdot\|_{\overline{\Omega}_j,m})\right)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfungsfolge von Ω. Dann definiert man

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) := \{\varphi : \Omega \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ bel. oft differenzierbar}\}$$

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \mathrm{supp}(\varphi) \subset \Omega \ \wedge \ \mathrm{supp}(\Omega) \text{ kompakt}\}$$

1.3.6 Topologische Aspekte von $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$

Auf $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ können die Halbnormen

$$\|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j,k} := \underbrace{\sup_{\substack{x\in\overline{\Omega}_j \\ |\alpha|\le k}} |D^\alpha \varphi(x)|}_{\max\limits_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha\varphi\|_{\overline{\Omega}_j}} \quad , \quad j \in \mathbb{N}, \ k \in \mathbb{N}_0$$

eingeführt werden, die den Konvergenzbegriff

$$\varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \ :\Leftrightarrow \ \|\varphi_\nu - \varphi\|_{\overline{\Omega}_j,k} \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, j \in \mathbb{N}, \ k \in \mathbb{N}_0 \tag{1.3.6.1}$$

erzeugen. Bemerke, dass $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}_j,m}$ eine Norm auf $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega}_j)$ ist.

Bemerkungen:

(i) Es ergibt sich, dass $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ metrisierbar, lokal-konvex und vollständig (Frechet-Raum) ist, mit einer genau den obigen Konvergenzbegriff erzeugenden Metrik. Setzt man diese Topologie voraus, schreibt man auch $\mathscr{C}(\Omega)$ für $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

(ii) Die Halbnormen $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}_j,k}$ erfüllen die Ungleichung

$$\|\varphi\psi\|_{\overline{\Omega}_j,k} \leq C_k \cdot \|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j,k} \|\psi\|_{\overline{\Omega}_j,k} \tag{1.3.6.2}$$

für irgendwelche Konstanten $C_k,\ k \in \mathbb{N}_0$, denn

$$\begin{aligned}
\|\varphi\psi\|_{\overline{\Omega}_j,k} &= \sup_{\substack{x\in\overline{\Omega}_j\\|\alpha|\leq k}} \Big| \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} D^\beta\varphi(x) D^\gamma\psi(x)\Big| \\
&\leq \sup_{\substack{x\in\overline{\Omega}_j\\|\alpha|\leq k}} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} |D^\beta\varphi(x)||D^\gamma\psi(x)| \\
&\leq \max_{|a|\leq k} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} \underbrace{\sup_{x\in\overline{\Omega}_j} \left|D^\beta\varphi\right|}_{\leq\|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j,k}} \cdot \underbrace{\sup_{x\in\overline{\Omega}_j} |D^\gamma\psi|}_{\leq\|\psi\|_{\overline{\Omega}_j,k}} \leq \underbrace{\left[\max_{|\alpha|\leq k} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}\right]}_{C_k} \cdot \|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j,k} \|\psi\|_{\overline{\Omega}_j,k}
\end{aligned}$$

(iii) Für konvergente Folgen $\varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi,\ \psi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \psi$ in $\mathscr{C}(\Omega)$, ist auch $\varphi_\nu \cdot \psi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \cdot \psi$ in $\mathscr{C}(\Omega)$, denn

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\nu\psi_\nu - \varphi\psi\|_{\overline{\Omega}_j,k} &\leq \|(\varphi_\nu - \varphi)\,\psi_\nu\|_{\overline{\Omega}_j,k} + \|(\psi_\nu - \psi)\,\varphi\|_{\overline{\Omega}_j,k} \\
&\leq C_k \underbrace{\|\varphi_\nu - \varphi\|_{\overline{\Omega}_j,k}}_{\overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow}0} \cdot \underbrace{\|\psi_\nu\|_{\overline{\Omega}_j,k}}_{\overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow}\|\psi\|_{\overline{\Omega}_j,k}} + C_k \underbrace{\|\psi_\nu - \psi\|_{\overline{\Omega}_j,k}}_{\overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow}0} \underbrace{\|\varphi_\nu\|_{\overline{\Omega}_j,k}}_{\overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow}\|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j,k}} \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

(iv) Sei $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ auch offen und $\tau : \Omega' \to \Omega$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus. Dazu Ausschöpfungsfolge $\Omega'_j := \tau^{-1}(\Omega_j)$ von Ω' (vgl. Transformationslemma 1.2.2). Dann gilt für $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ die Abschätzung

$$\|\varphi \circ \tau\|_{\overline{\Omega'}_j,k} \leq C_{k,\tau} \cdot \|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j,k}$$

für irgendwelche Konstanten $C_{j,k,\tau} \in \mathbb{R}$.
Beweis: Induktion über k. Der Fall $k = 0$ ist klar, denn es ist stets

$$\sup_{x\in\overline{\Omega'}_j} |\varphi\circ\tau| = \sup_{y\in\overline{\Omega}_j} |\varphi(y)|$$

Es gelte nun die Aussage für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist für $|\alpha| \leq k$:

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial}{\partial x^i}\partial^\alpha\varphi\circ\tau\right\|_{\overline{\Omega'}_j} &\overset{\text{Schwarz}}{=} \left\|\partial^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(\varphi\circ\tau)\right)\right\|_{\overline{\Omega'}_j} = \left\|\partial^\alpha\left(\sum_l \frac{\partial\varphi}{\partial x^l}(\tau)\cdot\frac{\partial\tau^l}{\partial x^i}\right)\right\|_{\overline{\Omega'}_j} \\
&\leq \sum_l \left\|\partial^\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^l}(\tau)\cdot\frac{\partial\tau^l}{\partial x^i}\right)\right\|_{\overline{\Omega'}_j} \leq \sum_i \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x^l}(\tau)\cdot\frac{\partial\tau^l}{\partial x^i}\right\|_{\overline{\Omega'}_j,|\alpha|} \\
&\overset{(1.3.6.2)}{\leq} \sum_l C_k \cdot \left\|\frac{\partial\tau^k}{\partial x^j}\right\|_{\overline{\Omega'}_j,k} \cdot \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x^l}(\tau)\right\|_{\overline{\Omega'}_j,k} \overset{\text{I.V.}}{\leq} \sum_l C_k \cdot \left\|\frac{\partial\tau^k}{\partial x^j}\right\|_{\overline{\Omega'}_j,k} \cdot C_{j,k,\tau} \cdot \underbrace{\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x^l}\right\|_{\overline{\Omega}_j,k}}_{\leq\|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j,k+1}} \\
&\leq \underbrace{\left[\sum_l C_k C_{j,k,\tau} \cdot \left\|\frac{\partial\tau^k}{\partial x^j}\right\|_{\overline{\Omega'}_j,k}\right]}_{C_{j,k+1,\tau}} \cdot \|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j,k+1}
\end{aligned}$$

(v) Sei $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ auch offen und $\tau : \Omega' \to \Omega$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus. Gehen $\varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ in $\mathscr{C}(\Omega)$, so gehen $\varphi_\nu \circ \tau \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \circ \tau$ in $\mathscr{C}(\Omega')$.
Beweis: Ω' sei ausgestattet mit der Ausschöpfungsfolge $\Omega'_j := \tau^{-1}(\Omega_j)$ (vgl. (iv)). Dann:

$$\|(\varphi_\nu - \varphi) \circ \tau\|_{\overline{\Omega'}_j,k} \leq \underbrace{C_{j,k,\tau}}_{\text{const}} \cdot \|\varphi_\nu - \varphi\|_{\overline{\Omega}_j,k} \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

1.3.7 Topologische Aspekte von $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

Wie sich herausstellt, ist $\mathcal{C}_0^\infty$ bzgl. des obigen Konvergenzbegriffes (Ausdr. 1.3.6.1) <u>nicht</u> vollständig. Als Beispiel sei die Funktionenfolge

$$\varphi_j(x) := \begin{cases} 1 & : x \in \overline{\Omega}_j \\ 0 & : x \in \Omega \setminus \Omega_{j+1} \\ \text{glatt} & \text{dazwischen} \end{cases}$$

betrachtet. Dann geht $\varphi_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 1$ bzgl. des in $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ Konvergenzbegriffes. Doch ist $1 \notin \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Führen deshalb einen neuen Konvergenzbegriff ein: Wir sagen $\varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \;:\Leftrightarrow$

- $\exists\, K \subset \Omega$ kompakt und $\operatorname{supp}(\varphi_\nu), \operatorname{supp}(\varphi) \subset K$
- $D^\alpha \varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} D^\alpha \varphi$ gleichmäßig auf $K \;\; \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$, d.h.

$$\|D^\alpha \varphi_\nu - D^\alpha \varphi\|_\infty \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$

bzw. äquivalent dazu:

$$\|\varphi_\nu - \varphi\|_{K,k} \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0$$

Bemerkungen:

(i) Oft setzt man diesen Konvergenzbegriff in $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ als gegeben voraus, und schreibt $\mathfrak{D}(\Omega)$ für $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

(ii) $\mathfrak{D}(\Omega)$ ist vollständig, jedoch <u>nicht</u> metrisierbar.

(iii) In Abschnitt 1.4.1 wird gezeigt: $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \neq \emptyset$.

(iv) Analog zu $\mathscr{C}(\Omega)$, gilt auch hier: Für zwei konvergente Folgen $\varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$, $\psi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \psi$ in $\mathfrak{D}(\Omega)$, geht auch $\varphi_\nu\psi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi\psi$ in $\mathfrak{D}(\Omega)$, denn $\operatorname{supp}(\varphi_\nu\psi_\nu) \subset \operatorname{supp}(\varphi_\nu) \subset K$ und $\|\varphi_\nu\psi_\nu - \varphi\psi\|_{K,k} \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (vgl. Gl. 1.3.6.2).

(v) Sei $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ auch offen und $\tau : \Omega' \to \Omega$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus. Gehen $\varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ in $\mathfrak{D}(\Omega)$, so gehen $\varphi_\nu \circ \tau \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \circ \tau$ in $\mathfrak{D}(\Omega')$, denn

$$\operatorname{supp} \varphi_\nu \circ \tau \subset \tau^{-1} (\operatorname{supp} \varphi_\nu) \subset \underbrace{\tau^{-1}(K)}_{\text{kompakt}}$$

und $\|\varphi_\nu\tau - \varphi\tau\|_{K,k} \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (vgl. 1.3.6 Bemerkung (v)).

1.3.8 Lemma: Einbettung der Funktionenräume

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann:

1. $\mathfrak{D}(\Omega)$ ist stetig in $\mathscr{C}(\Omega)$ eingebettet:

$$\mathfrak{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}(\Omega)$$

das heißt $\mathfrak{D}(\Omega) \subseteq \mathscr{C}(\Omega)$ und für $\psi_k \underset{\mathfrak{D}(\Omega)}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}}$ gilt auch $\psi_k \underset{\mathscr{C}(\Omega)}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} \psi$. Speziell gilt sogar

$$\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$$

2. Sind $\psi, (\psi_k) \subseteq \mathfrak{D}(\Omega)$ mit $\psi_k \underset{\mathscr{C}(\Omega)}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}}$ und $\mathrm{supp}(\psi), \mathrm{supp}(\psi_k) \subseteq K$ für irgendeine Kompakte $K \subseteq \Omega$, so gehen sogar $\psi_k \underset{\mathfrak{D}(\Omega)}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} \psi$.

3. $\mathfrak{D}(\Omega)$ ist dicht in $\mathscr{C}(\Omega)$, im Sinne dass für $\psi \in \mathscr{C}(\Omega)$ stets eine Folge $(\psi_k) \subseteq \mathfrak{D}(\Omega)$ existiert mit $\psi_k \underset{\mathscr{C}(\Omega)}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} \psi$.

Beweis:

1. Klar.
2. Klar.
3. Zu Ausschöpfungsfolge $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Ω existieren $\eta_k \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ mit $\eta \left.\right|_{|\Omega|_k} = 1$ (siehe später Lemma 1.4.4). Insbesondere sind $\psi\eta_k \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Wegen $\eta_k \underset{\mathscr{C}(\Omega)}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} 1$ gehen auch $\eta_k\psi \underset{\mathscr{C}(\Omega)}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} \psi$.

□

1.4 Zerlegungen der Eins

1.4.1 Vorbetrachtung

Betrachten die Funktion

$$\omega(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & |t| < 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist ω stetig auf $\mathbb{R}$ mit $\mathrm{supp}(\omega) = [-1, 1]$ und

$$\omega^{(k)}(t) = \frac{P_k(t)}{(1-t^2)^{2k}} \cdot \omega(t) \quad , \quad P_k : \text{Polynom vom Grad } \leq k$$

das heißt $\omega \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

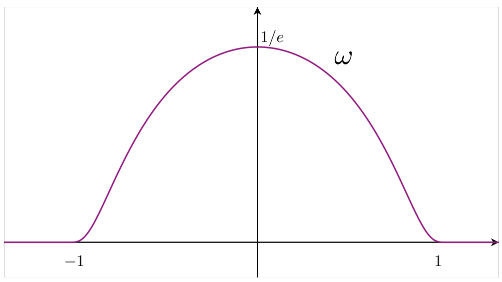

Abbildung 1: Zur Definition von ω in einer Dimension.

Die n-dimensionale Verallgemeinerung

$$\omega(x) := \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & : \|x\| < 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad c > 0$$

ist ebenfalls glatt mit $\mathrm{supp}(\omega) = B_1^n$. Dabei wird c so gewählt dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega \; d^n x = 1$$

ist. Ist nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, so existiert ein $x_0 \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$ so dass $B_{2\varepsilon}(x_0) \subset \Omega$. Setzt man nun

$$\omega_{\varepsilon,x_0}(x) := \omega_\varepsilon(x - x_0) := \frac{1}{\varepsilon^n}\omega\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right) \quad , \tag{1.4.1.1}$$

so ist $\omega_{\varepsilon,x_0} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ und erfüllt

$$\int\limits_\Omega \omega_{\varepsilon,x_0}\ d^n x = 1$$

1.4.2 Lemma: Glättung mit ω_h

Sei $f \in L_p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p < \infty$. Dann gilt für die Faltung

$$f_h(x) := (f * \omega_h)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z)\omega_h(x-z)\ d^n z = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-hz)\omega(z)\ d^n z$$

und jedes $h > 0$:

1. f_h ist glatt.
2. $\|f_h\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$.
3. $\|f_h - f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
4. $\operatorname{supp}(f_h) \subset (\operatorname{supp}(f))_h := \bigcup\limits_{x\in\operatorname{supp}(f)} B_h(x)$.

Beweis:

1. Betrachten für $0 < t < 1,\ \nu \in \mathbb{R}^n,\ \|\nu\| = 1$ und festes $x \in \mathbb{R}^n$ den Differenzenquotient

$$\frac{f_h(x+t\nu) - f_h(x)}{t} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{1}{t}\left[\omega_h(x+t\nu-z) - \omega_h(x-z)\right] f(z)}_{g_t(z)}\ d^n z = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_t(z)\ d^n z$$

Dann ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$|g_t(z)| \leq \widetilde{C} \cdot \left|\widetilde{f}(z)\right|$$

mit

$$\widetilde{C} := \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial \omega_h}{\partial \nu}(y)\right| < \infty \quad , \quad \widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & : z \in B_{1+h}(x) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} .$$

Außerdem ist nach der Hölderschen Ungleichung

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\widetilde{f}(z)\right|\ d^n z \leq \|\widetilde{f}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

da $\operatorname{supp}(\widetilde{f})$ beschränkt ist. Da Punktweise

$$g_t(z) \overset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial \omega_h}{\partial \nu}(x-z) f(z)\ ,$$

existiert nach dem Satz von Lebesgue das Integral

$$\underbrace{\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_t(z)\ d^n z}_{\frac{\partial f_h}{\partial \nu}(x)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lim_{t\to 0} g_t(z)\ dz = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \omega_h}{\partial \nu}(x-z)\ f(z)\ d^n z < \infty$$

und somit auch die Ableitung $\partial_\nu f_h(x)$. In obigen Überlegungen wurde von ω_h nur die Beschränktheit von $\partial_\nu \omega_h$ und Kompaktheit von $\operatorname{supp}(\omega_h)$ benutzt. Es kann also iterativ auf analoger Weise die Existenz aller höheren Ableitungen von f_h gezeigt werden.

2. Mit

$$|f_h(x)|^p \overset{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}{=} \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-hz)\omega(z)^{1/p}\omega(z)^{1/q}d^nz\Big|^p \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left\{\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-hz)|^p\,\omega(z)^{\frac{p}{p}}d^nz\Big]^{\frac{1}{p}} \underbrace{\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n}\omega(z)^{\frac{q}{q}}d^nz\Big]^{\frac{1}{q}}}_{1}\right\}^p$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-hz)|^p\,\omega(z)\ d^nz$$

(bemerke dass für $p=1$ die Aussage trivial ist) erhält man

$$\|f_h\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_h(x)|^p\ \ d^nx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-hz)|^p\,\omega(z)\ d^nz\ d^nx \overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\omega(z)\ \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x-hz)|^p\ \ d^nx}_{\|f\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)}}\ d^nz$$

$$= \|f\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)}\cdot \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n}\omega(z)\ d^nz}_{1} = \|f\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

und somit

$$\|f_h\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

3. Wegen $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$ existiert $\forall\ \delta>0$ eine stetige Funktion $g_\delta\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{supp}(g_\delta)$ kompakt und

$$\|f-g_\delta\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \delta$$

Dann ist wegen

$$\|f_h-f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \underbrace{\|\underbrace{\omega_h*f-\omega_h*g_\delta}_{(f-g_\delta)_h}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}_{\leq\|f-g_\delta\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\ \text{nach 2.}} + \|\underbrace{\omega_h*g_\delta}_{(g_\delta)_h} - g_\delta\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \underbrace{\|g_\delta-f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}_{<\delta}$$

$$\leq \underbrace{\|f-g_\delta\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}_{<\delta} + \|(g_\delta)_h-g_\delta\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \delta$$

$$< 2\delta + \|(g_\delta)_h-g_\delta\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

und der Willkür von δ das Problem zurückführbar auf den Spezialfall stetiger Abbildungen g_δ mit kompaktem Träger.

Wir setzen für Menge $A\subset\mathbb{R}^n$ und $h\geq 0$:

$$A_h := \{x\in\mathbb{R}^n : A\cap B_h(x)\neq\emptyset\} = \bigcup_{x\in B} B_h(x) \tag{1.4.2.1}$$

Ist A beschränkt, so ist offensichtlich auch A_h beschränkt, und $\mathrm{vol}_n(A_h)$ ist monoton wachsend in h.

Da g_δ stetig ist mit Kompaktem träger, ist g_δ sogar gleichmäßig stetig, das heißt für $\sigma>0$ existiert stets ein $\varepsilon>0$ mit

$$|g_\delta(x)-g_\delta(x')| < \sigma\ \ \forall\ \|x-x'\|\leq\varepsilon$$

also insbesondere

$$|g_\delta(x-hz)-g_\delta(x)| < \sigma\ \ \forall\ \|hz\|<\varepsilon$$

Somit kann man für $h < \varepsilon$ abschätzen

$$|(g_\delta)_h(x) - g_\delta(x)| = \Big| \int\limits_{B_1^n} |g_\delta(x - hz) - g_\delta|\, \omega(z)\ d^n z \Big| \le \sigma \underbrace{\int\limits_{B_1} \omega(z)\ d^n z}_{1} = \sigma$$

bzw.

$$\|(g_\delta)_h - g_\delta\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(g_\delta)_h(x) - g_\delta(x)|^p\ \ d^n x \le \sigma^p \cdot \underbrace{\mathrm{vol}_n \left[[\mathrm{supp}(g_\delta)]_h \right]}_{\substack{\text{beschränkt für}\\ h<1}}$$

das heißt für genügend kleine Wahl von h wird $\|(g_\delta)_h - g_\delta\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ beliebig klein.

4. Folgt aus $\mathrm{supp}(\omega_h) = B_h(0)$.

□

1.4.3 Lemma über Mengenabstände

Sei $\Omega^o \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega \subset \Omega^o$ kompakt. Dann gilt

$$d(\Omega, \partial\Omega_0) := \inf \{\|x - y\| : x \in \Omega,\ y \in \partial\Omega_0\} > 0$$

Beweis durch Widerspruch. Sei $d(\Omega, \partial\Omega_0) = 0$, dann existiert eine Folge $(x_k)_k \in \Omega$ so dass $d(x_k, \partial\Omega) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Da Ω kompakt ist, existiert eine in Ω konvergente Teilfolge $x_{k_i} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} x \in \Omega$. Der Punkt $x \in \Omega$ ist dann offensichtlich ein Häufungspunkt von $\partial\Omega_0$, also $x \notin \Omega$, ein Widerspruch!
□

1.4.4 Lemma: Existenz abklingender Funktionen

Es seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen mit $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ kompakt. Dann existiert eine reellwertige Funktion

$$\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_2)$$

mit

$$0 \le \varphi(x) \le 1 \ \text{ für } \ x \in \Omega_2$$

und $\varphi\big|_{\overline{\Omega}_1} = 1$.

Beweis: Nach Lemma 1.4.3 ist $d(\overline{\Omega}_1, \partial\Omega_2) =: \delta > 0$. Die Funktion

$$\varphi(x) := \left[1_{(\overline{\Omega}_1)_{\frac{\delta}{3}}}\right] * \omega_h \quad , \quad 0 < h < \frac{\delta}{3}$$

erfüllt genau die Voraussetzungen.

1.4.5 Lemma: Zerlegung der Einheit

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\mathcal{O}_1, .., \mathcal{O}_N$ offene Mengen mit

$$M \subset \bigcup_{i=1}^N \mathcal{O}_i$$

Dann existieren Funktionen $\varphi_i \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}_i)$ mit $0 \le \varphi_i \le 1$ und

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i(x) = 1 \quad , \quad x \in M$$

(*Zerlegung der Einheit*).

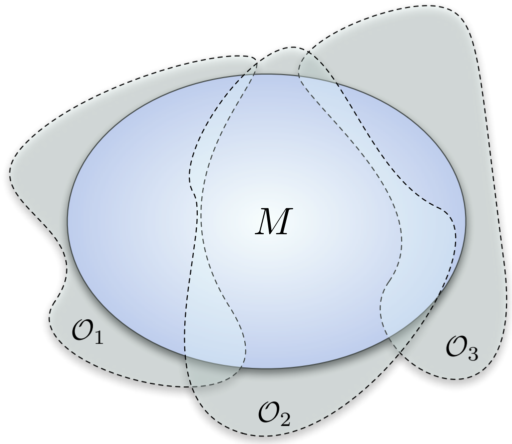

Abbildung 2: Überdeckung von M durch offene Mengen $\mathcal{O}_i$.

Beweis: Setze

$$\mathcal{O}_i^\delta := \{x \in \mathcal{O}_i : d(x, \partial\mathcal{O}_i) > \delta\}$$

für $\delta > 0$. Dann $\exists\ \delta_0 > 0$ so dass immer noch

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{O}_i^{\delta_0}$$

Setzen wir

$$M_h := \{x \in \mathbb{R}^n : M \cap B_h(x) \neq \emptyset\}$$

$$M_h^o := \{x \in \mathbb{R}^n : M \cap B_h^o(x) \neq \emptyset\} \supset M$$

dann existiert ein $h_0 > 0$ so dass

$$M_h \subset \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{O}_i^{\delta_0} \quad \forall\ 0 \leq h < h_0$$

Außerdem ist $\overline{\mathcal{O}_i^{\delta_0}} \subset \mathcal{O}_i$, so dass nach Lemma 1.4.4 $\psi_i \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}_i)$ existieren mit

$$\psi_i\Big|_{\overline{\mathcal{O}_i^{\delta_0}}} = 1 \quad , \quad 0 \leq \psi_i \leq 1$$

das heißt

$$\sum_{i=1}^{N} \psi_i(x) \geq 1 \quad , \quad x \in M_h$$

Nach Lemma 1.4.4 existiert außerdem ein $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(M_h^o)$ mit $\psi\big|_M = 1$. Die Funktion

$$\varphi_i(x) := \frac{\psi_i(x)}{\sum_{i=1}^{N} \psi_i(x)} \cdot \psi(x)$$

erfüllt nun die Bedingungen.
□

2 Distributionen - Verallgemeinerte Funktionen

2.1 Vorbetrachtung

Im folgenden sei Ω offen und $X = \mathfrak{D}(\Omega)$ (1.3.7) bzw. $X = \mathscr{C}(\Omega)$ (1.3.6) bzw. $X = S(\mathbb{R}^n)$ (1.3.2), jeweils ausgestattet mit einer Familie $(\|\cdot\|_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Halbnormen bzw. dem entsprechenden Konvergenzbegriff.

2.1.1 Definition: Distribution auf X

Eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$u : X \to \mathbb{C} \quad , \quad \varphi \overset{u}{\mapsto} \langle u, \varphi\rangle$$

heißt *stetig* (*folgenstetig*) :⇔

$$\forall\ \varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \in X \ :\ \langle u, \varphi_\nu\rangle \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \langle u, \varphi\rangle$$

Der Raum der linearen, stetigen Funktionale auf X wird mit $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ bezeichnet, seine Elemente auch *Distributionen*.

Notation: Zu $U \subset \Omega$ und Distribution u auf $\mathfrak{D}(\Omega)$ nennen wir

$$u\big|_U : \{\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) : \operatorname{supp}(\varphi) \subset U\} \to \mathbb{C} \quad , \quad \varphi \mapsto u(\varphi)$$

die *Einschränkung von u auf U*. Analog auch für $\mathscr{C}(\Omega)$ und $S(\mathbb{R}^n)$.

2.1.2 Satz: Charakterisierung der Stetigkeit

Eine lineare Abbildung $u : X \to \mathbb{C}$ (im Fall $X = S(\mathbb{R}^n)$ oder $X = \mathscr{C}(\Omega)$) ist genau dann stetig wenn

$$\exists\ C_u \geq 0,\ l_u \in \mathbb{N} : |\langle u, \varphi\rangle| \leq C \cdot \max_{1\leq k\leq l_u} \|\varphi\|_k \quad \forall\ \varphi \in X$$

Spezialfälle:

$X = S(\mathbb{R}^n)$:

$$\|\varphi\|_k := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^k \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha \varphi(x)|$$

$X = \mathscr{C}(\Omega)$: Für Ausschöpfungsfolge $\Omega_1, \Omega_2, ..$ von Ω:

$$\|\varphi\|_k := \|\varphi\|_{\overline{\Omega}_k, k} = \sup_{\substack{x\in\overline{\Omega}_k \\ |\alpha|=k}} |D^\alpha \varphi(x)|$$

$X = \mathfrak{D}(\Omega)$: Für Ausschöpfungsfolge $\Omega_1, \Omega_2, ..$ von Ω ist u stetig genau dann wenn

$$\exists\ C_u \geq 0 : \forall\ j \in \mathbb{N} : \exists\ l_{u,j} : |\langle u, \varphi\rangle| \leq C_u \cdot \sup_{\substack{x\in\overline{\Omega}_j \\ |\alpha|\leq l_{u,j}}} |D^\alpha \varphi(x)| \quad \forall\ \varphi \in X$$

2.1.3 X' als linearer Raum

Der Raum X' aller linearen, stetigen Funktionale auf $X \in \{\mathfrak{D}(\Omega), \mathscr{C}(\Omega), S(\mathbb{R}^n)\}$ ist ebenfalls ein Vektorraum:

$$\langle \lambda u + \mu v, \varphi\rangle := \lambda \langle u, \varphi\rangle + \mu \langle v, \varphi\rangle \quad , \quad u, v \in X',\ \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \varphi \in X$$

Dabei führt man in X' die so genannte *schwache** (*punktweise*) *Konvergenz*

$$u_\nu \underset{\text{schwach*}}{\overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow}} u \in X' \quad :\Leftrightarrow \quad \langle u_\nu, \varphi\rangle \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \langle u, \varphi\rangle \quad \forall\ \varphi \in X$$

ein, und definiert eine Folge $(u_\nu) \subset X'$ als *Cauchy*, falls die komplexwertige Folge $\langle u_\nu, \varphi\rangle$ für beliebiges $\varphi \in X$ Cauchy ist. In diesem Kontext ist dann X' vollständig, denn für Cauchy-Folge $(u_\nu) \subset X'$ ist

$$u_\nu \underset{\text{punktweise}}{\overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow}} \underbrace{\left(\varphi \mapsto \left(\lim_{\nu\to\infty} \langle u_\nu, \varphi\rangle\right)\right)}_{\in X'}$$

2.1.4 Bemerkung zur Distributionen-Einbettung

Nach Lemma 1.3.8 gilt $\mathscr{E}'(\Omega) \subseteq \mathfrak{D}'(\Omega)$ für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und speziell sogar

$$\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \subseteq S'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$$

Siehe später Fortsetzungssatz 2.3.1 für die umgekehrte Richtung. Im Kontext der schwachen Konvergenz von Distributionen, gilt sogar

$$\boxed{\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)}$$

2.1.5 Vergleich mit $\mathbb{C}^n$

Für $X = \mathbb{C}^n$ und $\xi = (\xi_1, .., \xi_n),\ x = (x^1, .., x^n) \in \mathbb{C}^n$ sei betrachtet das Skalarprodukt

$$\langle \xi, x \rangle := \sum_{j=1}^{n} \xi_j x^j$$

Dann ist $x \mapsto \langle \xi, x \rangle$ eine stetige Linearform auf $\mathbb{C}^n$. Umgekehrt, kann jede Linearform $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ durch solch ein $\xi \in \mathbb{C}^n$ dargestellt werden:

$$\xi_j := \langle u, \mathbf{e}_j \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle u, x \rangle = \langle \xi, x \rangle$$

Die Zuordnung $u \to \xi$ ist eindeutig und sogar ein Isomorphismus, das heißt

$$(\mathbb{C}^n)' \cong \mathbb{C}^n$$

Analog, ist für $1 \leq p < \infty$, der Raum

$$l_p := \left\{ (x_j)_{j \in \mathbb{N}} : \|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p} < \infty \right\}$$

isomorph zu $(l_q)'$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Schließlich ist auch

$$L_p := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \|f\|_p := \sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p} < \infty \right\} \cong L_q$$

Ziel ist es nun, eine möglichst große Teilmenge von X' als Funktionen zu interpretieren.

2.1.6 Definition: $L_{p,\mathrm{loc}}$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$ beliebig. Dann definiert man

$$L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid \int_K |f(x)|^p \ dx < \infty \quad \forall\ K \subset \Omega \text{ kompakt} \right\}$$

als die Menge aller *lokal-p-integrierbaren* (*lokal-integrierbaren* falls $p = 1$) Funktionen auf Ω.

Beispiele:

(i) Polynome und allgemein stetige Funktionen gehören zu $L_{1,\mathrm{loc}}$.

(ii) Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L_p(\Omega) \subseteq L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega) \subseteq L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

(iii) Zwar ist $\frac{1}{x} \notin L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, jedoch $\frac{1}{x} \in L_{1,\mathrm{loc}}\left((0,1)\right)$.

2.1.7 Satz über Funktionen in $L_{1,\text{loc}}(\Omega)$

Sei Ω offen und $f \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$. Dann definiert f eine Distribution in $\mathfrak{D}'(\Omega)$ durch

$$\langle f, \varphi\rangle := \langle u_f, \varphi\rangle := \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\ dx \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

Ferner ist f eindeutig (bis auf Nullmengen) durch u_f bestimmt. Die so erzeugbaren Funktionale heißen *reguläre Distributionen*, der Rest *singuläre Distributionen*. In einem gewissen Sinne stellen Distributionen somit eine *Verallgemeinerung* von Funktionen dar.

Beweis: Tatsächlich ist dieses Integral endlich und somit u_f wohldefiniert, denn

$$\Big|\int\limits_\Omega f\cdot\varphi\ dx\Big| \leq \int\limits_\Omega |f(x)|\underbrace{|\varphi(x)|}_{\leq\|\varphi\|_\infty}\ dx \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \underbrace{\int\limits_{\text{supp}(\varphi)} |f(x)|\ dx}_{\substack{<\infty \\ \text{da supp}(\varphi) \\ \text{kompakt}}} < \infty$$

Anderseits ist u_f stetig, denn für $\varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ (also insbesondere $\text{supp}(\varphi_\nu), \text{supp}(\varphi) \subset K$ für irgendein $K \subset \Omega$ kompakt) ist

$$|\langle u_f,\varphi_\nu\rangle - \langle u_f,\varphi\rangle| \leq \int\limits_K |f(x)|\cdot|\varphi_\nu(x)-\varphi(x)|\ dx \leq \underbrace{\int\limits_K |f(x)|\ dx}_{C_{f,K}<\infty}\cdot\underbrace{\sup_{x\in K}|\varphi_\nu(x)-\varphi(x)|}_{\|\varphi_\nu-\varphi\|_\infty} \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Definiert man nun bzgl. der Äquivalenzrelation

$$f \sim g \ :\Leftrightarrow\ f = g(\text{mod}0) \quad , \quad f,g \in L_{1,\text{loc}}$$

die Äquivalenzklassen

$$[f] := \{g \in L_{1,\text{loc}} : g = f \text{ fast überall auf } \Omega\}$$

so ist die Zuordnung $[f] \mapsto u_f$ wohldefiniert und nach Lemma 2.1.11 eineindeutig.

□

2.1.8 Bemerkung zur Einbettung von L_p Räumen in $S'(\mathbb{R}^n)$

Sei $1 \leq p \leq \infty$.

1. Ist $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ (vgl. Bem (ii) in 2.1.6) so ist sogar $u_f \in S'(\mathbb{R}^n)$.
2. Konvergieren $f_n \underset{L_p}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} f$ so konvergieren auch die Distributionen $u_{f_n} \underset{\text{schwach*}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} u_f$.

Zusammengefasst also:

$$\boxed{L_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n) \quad , \quad 1 \leq p \leq \infty} \tag{2.1.8.1}$$

Beweis:

1. Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Dann

$$\overbrace{\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\cdot\varphi\ dx\Big|}^{\langle u_f,\varphi\rangle} \leq \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f\cdot\varphi|\ dx}_{\|f\cdot\varphi\|_{L_1}} \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_{L_p}\cdot\underbrace{\|\varphi\|_{L_{\frac{p}{p-1}}}}_{<\infty} \quad , \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

   Stetigkeit von u_f in $S(\mathbb{R}^n)$ folgt aus obiger Abschätzung.

2. Folgt direkt aus der Abschätzung.

□

2.1.9 Bemerkung zur Einbettung polynomialer Funktionen in $S'(\mathbb{R}^n)$

Sei $f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ so dass $|f| \in \mathcal{O}(\|x\|^N)$ für $\|x\| \to \infty$ und irgendein $N \geq 0$. Dann ist $u_f \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Nach Voraussetzung existieren $C, R > 0$ mit $|f(x)| \leq C\,\|x\|^N \;\; \forall \;\; \|x\| \geq R$. Zu $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ können wir daher abschätzen

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f \cdot \varphi \; dx \right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot |\varphi(x)| \;\; dx = \underbrace{\int\limits_{B_R(0)} |f(x)| \cdot |\varphi(x)| \;\; dx}_{\leq C_f \|\varphi\|_\infty} + \int\limits_{\|x\| \geq R} \underbrace{|f(x)|}_{\leq C\|x\|^N} \cdot |\varphi(x)| \;\; dx$$

$$\leq C_f \, \|\varphi\|_\infty + C \int\limits_{\|x\| \geq R} \underbrace{\left(1 + \|x\|^2\right)^{N+n} |\varphi(x)|}_{\leq \|\varphi\|_{0,2(N+n)}} \cdot \|x\|^{-(2n+N)} \, dx$$

$$\leq C_f \, \|\varphi\|_\infty + C'_f \cdot \|\varphi\|_{0,2(N+n)} < \infty$$

Insbesondere folgt aus der Abschätzung die Stetigkeit von u_f in $S(\mathbb{R}^n)$.
□

2.1.10 Lemma zur Konvergenz regulärer Distributionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

1. Sind $f, f_k \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ mit $f_k \,|_K \underset{\|\cdot\|_\infty}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} f \,|_K$ auf jeder kompakten $K \subseteq \Omega$, so gehen $u_{f_k} \underset{\text{schwach*}}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} u_f$ in $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

2. Seien nun $f_k, f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ majorisiert durch irgendeine $g \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $u_g \in S'(\mathbb{R}^n)$. Gehen $f_k \underset{\text{punktweise}}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} f$ (fast überall), so gehen sogar $u_{f_k} \underset{\text{schwach*}}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} u_f$ in $S'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis:

1. Sei $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Dann

$$|\langle u_{f_k} - u_f, \varphi \rangle| = \int\limits_{\text{supp}(\varphi)} |(f_k - f)\varphi| \;\; dx \leq \text{Vol}(\text{supp}(\varphi)) \cdot \|\varphi\|_\infty \cdot \underbrace{\sup_{x \in K} |f_k(x) - f(x)|}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. Für $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ gehen auch $f_k \cdot \varphi \underset{\text{punktweise}}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} f \cdot \varphi$. Dabei werden $f_k\varphi$ majorisiert durch die integrable $g\varphi$, so dass nach Lebesgue folgt

$$\langle u_{f_k}, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_k \varphi \; dx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f \varphi \; dx = \langle u_f, \varphi \rangle$$

□

2.1.11 Lemma über Nullfunktionen in $L_{1,\text{loc}}$

Es sei Ω offen, $f \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ und

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x) \; dx = 0 \quad \forall \; \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

Dann gilt $f(x) = 0$ fast-überall auf Ω.

Beweis: Sei $\mathcal{O}$ offen, beschränkt mit $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$. Dann ist nach 1.4.3

$$d(\overline{\mathcal{O}}, \partial\Omega) =: \delta > 0$$

Sei nun $0 < h < \frac{\delta}{2}$ beliebig und $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$, dazu

$$\varphi_h := \varphi * \omega_h \ .$$

Dann ist nach Lemma 1.4.2:

$$\mathrm{supp}(\varphi_h) \subset \mathcal{O}_{\delta/2} \subset \Omega$$

und insbesondere $\varphi_h \in \mathfrak{D}(\Omega)$, nach Voraussetzung also

$$0 = \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi_h(x)\ dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)\omega_h(x-z)\ dz\ dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\omega_h(x-z)\ dx\ dz$$

$$\overset{\substack{\omega_h \\ \text{gerade}}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\omega_h(z-x)\ dx\ dz = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) f_h(z)\ dz$$

Definieren nun

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & : x \in \mathcal{O}_{\delta/2} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $\widetilde{f}_h(z) = f_h(z)$ für $z \in \mathcal{O}$ und demnach

$$0 = \int\limits_{\Omega} \varphi(z)\widetilde{f}_h(z)\ dz \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$$

wobei jetzt $\widetilde{f}_h \in \mathcal{C}^\infty$ und $\widetilde{f}_h \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Es muss also $\widetilde{f}_h = 0 \quad \forall\ x \in \mathcal{O}$ sein, und somit

$$\|f\|_{L_1(\mathcal{O})} = \|\widetilde{f}\|_{L_1(\mathcal{O})} \leq \underbrace{\|\widetilde{f} - \widetilde{f}_h\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}_{\substack{\overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ (1.4.2)}} + \underbrace{\|\widetilde{f}_h\|_{L_1(\mathcal{O})}}_{0}$$

bzw.

$$\|f\|_{L_1(\mathcal{O})} = 0 \quad \Rightarrow \quad f\big|_{\mathcal{O}} = 0(\mathrm{mod}0)$$

Doch da $\mathcal{O}$ beliebig war, muss $f = 0$ fast überall auf Ω sein.
□

2.1.12 Die δ-Distribution

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Für $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ setzen

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle := \varphi(x_0)$$

Dann ist $\delta_{x_0} : \varphi \mapsto \varphi(x_0)$ eine (singuläre falls $x_0 \in \Omega$) Distribution auf $\mathfrak{D}(\Omega)$ und heißt *δ-Distribution* oder *Dirac-Distribution.*

Erläuterung: Wegen

$$|\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle| = |\varphi(x_0)| \leq \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)| \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

folgt nach 2.1.2 die Stetigkeit von δ_{x_0}. Alternativ ist für $\varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ auch

$$|\langle \delta_{x_0}, \varphi_\nu - \varphi \rangle| = |\varphi_\nu(x_0) - \varphi(x_0)| \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Sei nun $x_0 \in \Omega$, zu zeigen wäre die nicht-Regularität von δ_{x_0}. Wäre $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ und

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)\ dx = \varphi(0) \quad \forall\ \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

so müsse insbesondere mit $x = (x^1, .., x^n) \in \mathbb{R}^n$ gelten

$$\int_\Omega f(x) \left[(x^i - x_0^i)\varphi(x)\right] \, dx = \left[(x^i - x_0^i)\varphi(x)\right]\Big|_{x=x_0} = 0$$

und damit

$$\int_\Omega \left[f(x)(x^i - x_0^i)\right] \varphi(x) \, dx = 0 \quad \forall \, \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

Nach Lemma 2.1.11 ist als $(x^i - x_0^i)f(x) = 0$ bzw. $f(x) = 0$ fast überall auf Ω, also $\delta_{x_0} = 0$, was wegen $x_0 \in \Omega$ nicht sein kann! $\square$

Verallgemeinerungen:

(i) Zu (stückweiser) glatter Fläche $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei $\mu : S \to \mathbb{R}$ stückweise stetig. Dann definiert ähnlich wie vorhin

$$\langle \mu\delta_S, \varphi \rangle := \underbrace{\int_S \mu(x)\varphi(x) \, ds}_{\text{Oberflächenintegral}} \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

eine Distribution auf $\mathfrak{D}(\Omega)$. Interpretiert man **formal** $\mu\delta_S$ als Funktion, so ist $\mu(x)\delta_S(x) = 0$ für $x \notin S$, denn $\exists \; B_\delta^o(x) \cap S = \emptyset$ und demnach

$$\langle \mu\delta_S, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_\delta^o(x))$$

(ii) Die Abbildung

$$\langle u, \varphi \rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(k) \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

ist linear und stetig, da für $\varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ mit $\mathrm{supp}(\varphi_\nu), \mathrm{supp}(\varphi) \subset K \subset \Omega$: kompakt gilt:

$$|\langle u, \varphi_\nu - \varphi \rangle| \leq \sum_{k \in K \cap \mathbb{Z}^n} |\varphi_\nu(k) - \varphi(k)| \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

2.1.13 Distributionen durch reguläre Maße

Jedes reguläre[2] Borel-Maß μ auf $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega))$ bestimmt durch

$$\langle \mu, \varphi \rangle := \int_\Omega \varphi \, d\mu \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

eine Distribution. Dabei ist die Zuordnung $\mu \mapsto \langle \mu, \cdot \rangle$ injektiv.

2.1.14 Der Cauchysche Hauptwert als Distribution

Betrachten die Abbildung

$$\left(x \mapsto \frac{1}{x} \right) \notin L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$$

und definieren auf $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ die Abbildung $\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}$ durch

$$\langle \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$$

Dann ist $\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}$ eine Distribution und $\langle \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}, \varphi \rangle$ heißt *Cauchyscher Hauptwert* (**v***aleur* **p***rincipal*) von φ.

[2] Ein Borel-Maß μ auf einem topologischen Raum $(T, \mathscr{B}(T))$ heißt regulär falls für jedes $A \in \mathscr{B}(T)$ gilt:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup \{\mu(K) : K \subset A, \; A \text{ kompakt}\} \\ &= \inf \{\mu(U) : A \subset U, \; U \text{ offen}\} \end{aligned}$$

Erläuterung: Für beliebiges $R > 0$ ist

$$\int\limits_{R \geq \|x\| \geq \varepsilon} \frac{1}{x}\ dx = 0$$

Da $\operatorname{supp}(\varphi) \subset (-R_\varphi, R_\varphi)$ ist für irgendein $R_\varphi > 0$:

$$\int\limits_{\|x\| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx = \int\limits_{R_\varphi \geq \|x\| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx = \int\limits_{R_\varphi \geq \|x\| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\ dx \ = \underbrace{\int\limits_{R_\varphi \geq \|x\| \geq \varepsilon} \varphi'\left(\vartheta(x)x\right)\ dx}_{\text{eigentliches Integral}}$$

für eine Funktion $0 \leq \vartheta \leq 1$ auf $\mathbb{R}$ (vgl. Mittelwertsatz). Demnach

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{\|x\| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx = \int\limits_{R_\varphi \geq \|x\|} \varphi'(\vartheta(x)x)\ dx < \infty$$

Insbesondere ist

$$\left|\left\langle \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}, \varphi \right\rangle\right| \leq 2R_\varphi \cdot \max_{y \in \operatorname{supp}(\varphi)} |\varphi'(y)|$$

woraus leicht die Stetigkeit von $\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}$ folgt.

Bemerkung: Die Distribution $\mathcal{P}_{\frac{1}{x}} \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ wird außerhalb der 0 durch die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ erzeugt, das heißt für $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ mit $0 \notin \operatorname{supp}(\varphi)$ ist

$$\left\langle \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}, \varphi \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx$$

Es stellt sich nun die Frage: Kann jede beliebige $g \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R} \setminus \{x_0\})$ zu einer Distribution auf $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden, die außerhalb von x_0 durch g erzeugt wird? Leider ist die Antwort negativ, was an folgendem Gegenbeispiel illustriert sei. Betrachten

$$g \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad , \quad g(x) := e^{\frac{1}{x}}$$

und machen die Annahme es existiert eine Distribution $u_g \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ mit

$$\langle u_g, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{x}}\ dx \quad \forall\ \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}) : 0 \notin \operatorname{supp}(\varphi)$$

Definieren $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ so dass

$$\varphi_0(x) := \begin{cases} 0 & : x \notin [1,2] \\ \geq 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_0(x)\ dx = 1$$

(vgl. 1.4.1) und

$$\varphi_k(x) := ke^{-\frac{k}{2}} \cdot \varphi_0(kx) \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

Dann geht $\varphi_k \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$ in $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ jedoch

$$\langle u_g, \varphi_k \rangle = \int\limits_{1/k}^{2/k} ke^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{k}{2}} \varphi_0(kx)\ dx \overset{y := kx}{=} \int\limits_{1}^{2} e^{k\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)} \varphi_0(y)\ dy \geq \int\limits_{1}^{2} \varphi_0(y)\ dy = 1$$

ein Widerspruch zur Stetigkeit von u_g!

2.2 Folgen regulärer Distributionen

2.2.1 Vorbetrachtung

Folgen regulärer Distributionen auf $\mathfrak{D}(\Omega)$ sind charakterisiert durch Folgen entsprechender erzeugenden Funktionen in $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Im folgenden seien einige Beispiele illustriert.

1. Definieren zu $j \in \mathbb{N}$ die Funktionen (Distributionen)

$$u_j \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \quad , \quad u_j(x) := \sin(jx)$$

Dann gehen $u_j \underset{\text{schwach*}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0$ in $\mathfrak{D}'(\Omega)$ (jedoch nicht punktweise als Funktionen), denn für $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$

$$\langle u_j, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} \sin(jx)\varphi(x)\; dx = \int\limits_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \sin(jx)\varphi(x)\; dx = -\frac{1}{j} \underbrace{\cos(jx)\varphi(x)\Big|_{-R_\varphi}^{R_\varphi}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{j}\int\limits_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \cos(jx)\; \varphi'(x)\; dx}_{\text{beschränkt}} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

mit $\mathrm{supp}(\varphi) \subset (-R_\varphi, R_\varphi)$.

2. Betrachten die Funktionen

$$s_j(x) := \frac{\sin(jx)}{x} \quad , \quad s_j \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$$

Dann gehen die Distributionen $u_{s_j} \underset{\text{schwach*}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \pi\delta_0$ in $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$.

Beweis: Für $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{supp}(\varphi) \subset (-R_\varphi, R_\varphi)$ ist

$$\left\langle u_{s_j}, \varphi \right\rangle = \int\limits_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\sin(jx)}{x}\varphi(x)\; dx = \int\limits_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\sin(jx)}{x}\left[\varphi(x) - \varphi(0)\right]\; dx + \int\limits_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\sin(jx)}{x}\varphi(0)\; dx$$

wobei einerseits

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right] = \frac{\varphi'(x)x - [\varphi(x)-\varphi(0)]}{x^2} = \frac{\varphi'(x) - \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}}{x}$$

$$= \frac{\varphi'(x) - \varphi'(\vartheta(x)x)}{[1-\vartheta(x)]\,x}\,[1-\vartheta(x)] = \underbrace{\varphi''(\widetilde{\vartheta}(x)x)\,[1-\vartheta(x)]}_{\text{beschränkt}} \quad , \quad \vartheta, \widetilde{\vartheta} \text{ geeignet nach MWS}$$

$$\int\limits_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\sin(jx)}{x}\left[\varphi(x)-\varphi(0)\right]\; dx = \frac{1}{j}\underbrace{\int\limits_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \cos(jx)\frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right]\; dx}_{\text{beschränkt}} + \underbrace{\frac{1}{j}\cos(jx)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\Big|_{-R_\varphi}^{R_\varphi}}_{-\frac{2}{j}\cos(R_\varphi j)\varphi(0)\overset{j\to\infty}{\longrightarrow}0} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und anderseits

$$\int\limits_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\sin(jx)}{x}\varphi(0)\; dx \overset{y:=jx}{=} \int\limits_{-jR_\varphi}^{jR_\varphi} \frac{\sin y}{y}\varphi(0)\; dy \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(0)\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin(y)}{y}\; dy}_{\pi}$$

also

$$\left\langle u_{s_j}, \varphi \right\rangle \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \pi\cdot\varphi(0) \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$$

3. Die Funktionenfolgen $(f_n), (g_n), (h_n) \subset L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ aus Einführung 1.1.1 erzeugen Distributionen die gegen δ_0 in $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ gehen.

2.2.2 Formel von Sochozki

Betrachten die Familien von Funktionen $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (g_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ definiert durch

$$f_\varepsilon(x) := \frac{1}{x+i\varepsilon} \quad , \quad g_\varepsilon(x) := \frac{1}{x-i\varepsilon}$$

Dann gehen die Distributionen:

$$u_{f_\varepsilon} \underset{\text{schwach*}}{\overset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow}} -i\pi\delta_0 + \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}$$

$$u_{g_\varepsilon} \underset{\text{schwach*}}{\overset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow}} i\pi\delta_0 + \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}$$

in $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$.

Beweis: Zu $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{supp}(\varphi) \subset (-R_\varphi, R_\varphi)$ ist:

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\, dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \varphi(0) \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} dx + \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\left[\varphi(x)-\varphi(0)\right]\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\searrow 0} \varphi(0) \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+\varepsilon^2) - i\arctan\frac{x}{\varepsilon}\right]_{-R_\varphi}^{R_\varphi} + \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x+i\varepsilon}\, dx$$

$$\overset{\text{Lebesgue}}{=} -i\pi\cdot\varphi(0) + \underbrace{\int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\, dx}_{\left\langle \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}, \varphi\right\rangle}$$

Analog erhält man auch die 2. Formel.
□

2.2.3 Die Breit-Wigner-Formel

Die Familie von $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$-Funktionen

$$f_\varepsilon(x) := \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \quad , \quad \varepsilon > 0$$

erzeugt Distributionen mit

$$u_{f_\varepsilon} \underset{\text{schwach*}}{\overset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow}} \pi\delta_0$$

in $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$.

2.2.4 Lokalisationssatz für Distributionen

Zu offener Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von Ω, das heißt

$$\Omega = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i \quad , \quad \mathcal{O}_i : \text{offen}$$

Stimmen die Einschränkungen $u\big|_{\mathcal{O}_i},\ v\big|_{\mathcal{O}_i}$ zweier Distributionen $u, v \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ auf allen $\mathcal{O}_i$ überein, das heißt

$$\langle u, \varphi_i\rangle = \langle v, \varphi_i\rangle \quad \forall \quad \varphi_i \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}_i)$$

so gilt $u = v$.

Beweis: Sei $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, dann ist $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega$ kompakt, das heißt für geeignete $i_1, .., i_L \in I$ ist

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset \bigcup_{l=1}^{L} \mathcal{O}_{i_l}$$

Nach Lemma 1.4.5 (Zerlegung der Einheit) existieren reellwertige Funktionen $\varphi_{i_l} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}_{i_l})$ mit

$$\sum_{l=1}^{L} \varphi_{i_l}(x) = 1 \quad , \quad x \in \operatorname{supp}(\varphi)$$

Insbesondere

$$\varphi_{i_l} \cdot \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}_{i_l})$$

und somit

$$\langle u, \varphi \rangle = \left\langle u, \varphi \sum_{l=1}^{L} \varphi_{i_l} \right\rangle = \sum_{l=1}^{L} \underbrace{\langle u, \varphi \cdot \varphi_{i_l} \rangle}_{\langle v, \varphi \cdot \varphi_{i_l} \rangle} \overset{\text{analog}}{=} \langle v, \varphi \rangle$$

□

2.2.5 Definition: Träger einer Distribution

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $X(\Omega) := \mathfrak{D}(\Omega)$ oder $X(\Omega) := \mathscr{C}(\Omega)$ und $u \in X'(\Omega)$. Dann der *Träger* $\operatorname{supp}(u)$ der Distribution das Komplement (bzgl. Ω) der Vereinigung aller offenen[3] Mengen $\mathcal{O} \subset \Omega$ mit der Eigenschaft, dass $u\big|_{\mathcal{O}} = 0$ ist, das heißt $\langle u, \varphi \rangle = 0 \;\; \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$. Kurz:

$$\operatorname{supp}(u) := \Omega \setminus \left[\bigcup_{\substack{\mathcal{O} \subset \Omega \text{ offen} \\ \varphi|_{\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})} = 0}} \mathcal{O} \right]$$

Alternative Definition: Äquivalent zur obigen Definition ist

$$\operatorname{supp}(u) := \bigcap_{\substack{A \text{ abgeschlossen in } \Omega \\ u|_{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus A)} = 0}} A$$

Bemerkungen:

(i) $\operatorname{supp}(u)$ in abgeschlossen in Ω.

(ii) Es gilt:

$$\operatorname{supp}(u) = \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; \forall\, \delta > 0 : u\big|_{\mathcal{C}_0^\infty(B_\delta^o(x) \cap \Omega)} \neq 0 \right\}$$

(iii) Einige Autoren (e.g. Tribel) verwenden eine etwas modifizierte Definition

$$\operatorname{supp}'(u) := \left\{ x \in \operatorname{cl}(\Omega) \;\middle|\; \forall\, \delta > 0 : u\big|_{\mathcal{C}_0^\infty(B_\delta^o(x) \cap \Omega)} \neq 0 \right\}$$

Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ sind beide Definitionen äquivalent, im allgemeinen jedoch nicht.

(iv) Für reguläre Distribution u_f in $\mathfrak{D}'(\Omega)$ erzeugt durch $f \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ ist stets

$$\operatorname{supp}(u_f) \subset \operatorname{supp}(f)$$

(v) Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\operatorname{supp}(u_f) = \operatorname{supp}(f) = \operatorname{cl}_\Omega \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$$

[3] Beachte dass Offenheit in $(\Omega, \mathscr{O}(\Omega))$ äquivalent zur Offenheit in $\mathbb{R}^n$ ist (vgl. 1.2.4).

(vi) Für Distribution $u \in X'(\Omega)$ gilt:

$$u = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{supp}(u) = \emptyset$$

Beweis: Richtung "$\Rightarrow$" ist klar. Sei nun zunächst $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ mit $\mathrm{supp}(u) = \emptyset$, dann existiert $\forall\, x \in \Omega$ ein $\delta_x > 0$ mit

$$u\big|_{\mathcal{C}_0^\infty(B^o_{\delta_x}(x))\cap\Omega} = 0$$

Dabei ist

$$\left\{B^o_{\delta_x}(x) \cap \Omega\right\}_{x\in\Omega}$$

eine offene Überdeckung von Ω, so dass nach Lokalisationssatz 2.2.4 gilt $u = 0$ auf Ω. Ist nun $u \in \mathscr{C}'(\Omega)$, so besitzt natürlich auch die Einschränkung $u\big|_{\mathfrak{D}(\Omega)}$ leeren Träger, also $u\big|_{\mathfrak{D}(\Omega)} = 0$. Nach Lemma 1.3.8 existiert jedoch zu jedem $\psi \in \mathscr{C}(\Omega)$ eine Folge $(\psi_k) \subseteq \mathfrak{D}(\Omega)$ mit $\psi_k \underset{\mathscr{C}(\Omega)}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} \psi$, woraus auch $\langle u, \psi\rangle = 0$ folgt.

Beispiele:

$$\mathrm{supp}(\delta_{x_0}) = \{x_0\}\ ,\ \mathrm{supp}(u_{x\mapsto 1}) = \Omega\ ,\ \mathrm{supp}(\mu\delta_S) \subset S$$

2.2.6 Definition: Singuläre Träger

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $X(\Omega) = \mathfrak{D}(\Omega)$ oder $X(\Omega) = \mathscr{C}(\Omega)$ und $u \in X'(\Omega)$ eine Distribution. Dann heißt

$$\mathrm{singsupp}(u) := \Omega \setminus \{x_0 \in \Omega : u \text{ ist in einer Umgebung von } x_0 \text{ durch eine } \mathcal{C}^\infty\text{-Funktion erzeugbar}\}$$

$$= \Omega \setminus \left\{x_0 \in \Omega : \exists\, \delta > 0,\ f \in \mathcal{C}^\infty(B^o_\delta(x_0)) : \langle u, \varphi\rangle = \int\limits_{B^o_\delta(x_0)} f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B^o_\delta(x_0))\right\}$$

singulärer Träger von u.

Bemerkungen:

(i) Per Konstruktion gilt für Distribution $u \in X'(\Omega)$:

$$\mathrm{singsupp}(u) \subset \mathrm{supp}(u)$$

(ii) Gilt $\mathrm{singsupp}(u) = \emptyset$ für eine Distribution $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$, so ist u regulär.
Beweis: Sei $\mathrm{singsupp}(u) = \emptyset$, dann existiert für jeden Punkt $x \in \Omega$ eine Kugel $B^o_{\delta_x}(x)$ und Funktion $f_x \in \mathcal{C}^\infty(B^o_{\delta_x}(x))$ so dass $u\big|_{B^o_{\delta_x}(x)} = u_f$. An Überschneidungsumgebungen $\underbrace{B^o_{\delta_x}(x) \cap B^o_{\delta_y}(y)}_{\text{offen}} \neq \emptyset$ müssen nach 2.1.7 die Funktionen f_x und f_y fast-überall übereinstimmen. Da sie stetig sind, müssen sie im gesamten Überlappungsbereich übereinstimmen. Somit ist die Funktion

$$f(x) := f_x(x)$$

wohldefiniert und glatt, insbesondere lokal integrierbar. Da u_f und u auf allen Kugeln $B^o_{\delta_x}(x)$ übereinstimmen, folgt nach Lokalisationssatz 2.2.4 dass $u = u_f$. $\square$

Beispiele:

$$\mathrm{singsupp}(u_{x\mapsto 1}) = \emptyset\quad,\quad \mathrm{singsupp}(\delta_{x_0}) = \{x_0\}\ ,\ \mathrm{singsupp}(\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}) = \{0\} \subset \mathrm{supp}(\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}) = \mathbb{R}^n$$

2.3 Distributionen mit kompaktem Träger

2.3.1 Fortsetzungssatz für Distributionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ mit kompaktem Träger in Ω. Dann kann u eindeutig zu einem linearen, stetigen Funktional auf $\mathscr{C}(\omega)$ fortgesetzt werden.

Beweis:

Existenz: Da $\operatorname{supp}(u)$ kompakt ist, existiert nach Lemma 1.4.4 eine Funktion $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ mit $\eta\big|_{\operatorname{supp}(u)} = 1$. Zu $\psi \in \mathscr{C}(\Omega)$ sei nun definiert

$$\langle \widetilde{u}, \psi \rangle := \langle u, \underbrace{\eta\psi}_{\in \mathfrak{D}(\Omega)} \rangle$$

Offensichtlich ist $\widetilde{u} : \mathscr{C}(\Omega) \to \mathbb{C}$ linear. Für $\psi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \psi$ in $\mathscr{C}(\Omega)$ ist

$$\operatorname{supp}(\eta\psi_\nu),\ \operatorname{supp}(\eta\psi) \subset \operatorname{supp}(\eta) : \text{kompakt}$$

das heißt $\eta\psi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \eta\psi$ in $\mathfrak{D}(\Omega)$ (Beweis analog zu Bemerkung (iii) in 1.3.6). Somit

$$\langle \widetilde{u}, \psi_\nu \rangle = \langle u, \eta\psi_\nu \rangle \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \langle u, \eta\psi \rangle = \langle \widetilde{u}, \psi \rangle$$

das heißt $\widetilde{u}$ ist stetig.[4]

Eindeutigkeit: Sei $\widehat{u}$ eine weitere stetige & lineare Fortsetzung von u auf $\mathscr{C}(\Omega)$, das heißt

$$\langle \widetilde{u}, \varphi \rangle = \langle \widehat{u}, \varphi \rangle \quad , \quad \forall\ \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

Nach Lemma 1.3.8 existiert eine Folge $(\psi_k) \subseteq \mathfrak{D}(\Omega)$ mit $\psi_k \underset{\mathscr{C}(\Omega)}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} \psi$, also

$$\langle \widehat{u}, \psi \rangle \overset{\widehat{u}\text{ stetig}}{=} \lim_{k\to\infty} \langle \widehat{u}, \underbrace{\psi_k}_{\in \mathfrak{D}(\Omega)} \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \widetilde{u}, \psi_k \rangle \overset{\widetilde{u}\text{ stetig}}{=} \langle \widetilde{u}, \psi \rangle$$

das heißt $\widetilde{u} = \widehat{u}$ auf $\mathscr{C}(\Omega)$.

□

Bemerke: Per Definition des Trägers, bleibt für die fortgesetzte Distribution der Träger der gleiche.

2.3.2 Definition: $L_{p,\text{com}}$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \le p < \infty$. Dann definiert man

$$L_{p,\text{com}}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid \int\limits_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \ \wedge \ \operatorname{supp}(f) \subseteq \Omega \text{ kompakt} \right\}$$

als die Menge aller p-integrierbaren, komplexwertigen Funktionen mit kompakten Träger in Ω.

Bemerke: $\mathcal{C}_0 \subseteq L_{p,\text{com}} \subseteq L_p \subseteq L_{p,\text{loc}}$.

2.3.3 Satz über Funktionen in $L_{1,\text{com}}(\Omega)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f_1 \in L_{1,\text{com}}(\Omega)$. Dann definiert

$$\langle u_f, \psi \rangle := \int\limits_\Omega f(x)\psi(x)\, dx \quad , \quad \psi \in \mathscr{C}(\Omega)$$

auf $\mathscr{C}(\Omega)$ ein lineares, stetiges Funktional (Beweis ähnlich zu 2.1.7). Funktionale dieser Art nennt man *reguläre Distributionen* auf $\mathscr{C}(\Omega)$.

[4] Beachte: Nach Lemma 3.1.3 ist $\widetilde{u}$ tatsächlich eine Fortsetzung von u.

Bemerkung: Reguläre Distributionen $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ können Problemlos auf $\mathfrak{D}(\Omega)$ eingeschränkt werden, zumal $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Da Folgenkonvergenz in $\mathfrak{D}(\Omega)$ auch Folgenkonvergenz in $\mathscr{E}(\Omega)$ impliziert, sind sie auch tatsächlich stetig auf $\mathfrak{D}(\Omega)$. Aufgrund der stärkeren Forderungen an die zugrundeliegende Funktionen regulärer Distributionen in $\mathscr{E}'(\Omega)$ sind diese auch regulär in $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

2.3.4 Lemma: Träger von Distributionen in $\mathscr{E}'(\Omega)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann hat jede Distribution $v \in \mathscr{E}'(\Omega)$ einen kompakten Träger.

Beweis: Sei $(\Omega_j)_{js\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfungsfolge von Ω und angenommen dass $\mathrm{supp}(u) \subseteq \Omega$ nicht kompakt sei. Dann existiert nach Bemerkung 1.2.4 (iii) **kein** k mit $\mathrm{supp}(u) \subseteq \overline{\Omega}_k$. Das heißt für alle J gilt

$$\mathrm{supp}(u) \setminus \bigcup_{j=1}^{J} \overline{\Omega}_j = \mathrm{supp}(u) \setminus \overline{\Omega}_J \neq \emptyset$$

Da die (Ω_j) ganz Ω überdecken, existiert ferner zu jedem j_k ein j_{k+1} mit

$$\big(\mathrm{supp}(u) \setminus \overline{\Omega}_{j_k}\big) \cap \Omega_{j_{k+1}} \neq \emptyset$$

Setze $x_{k+1} \in \big(\mathrm{supp}(u) \setminus \overline{\Omega}_{j_k}\big) \cap \Omega_{j_{k+1}}$ und $\varepsilon_{k+1} > 0$ hinreichend klein dass

$$B^o_{\varepsilon_{k+1}}(x_{k+1}) \subseteq \underbrace{\Omega_{j_{k+1}} \setminus \overline{\Omega}_{j_k}}_{\text{offen}}$$

Mit $j_0 := 1$ erhält man so eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{supp}(u)$ und disjunkte Kugeln $B^o_{\varepsilon_k}(x_k)$ so dass jedes Ω_j nur von endlich vielen dieser Kugeln geschnitten wird. Insbesondere existieren $\psi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(B^o_{\varepsilon_j}(x_j))$ mit $\langle v, \psi_j\rangle = 1$ (Normierung o.B.d.A). Dann ist

$$\psi(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

Beachte dass die $B^o_{\varepsilon_j}(x_j)$ und somit auch die Träger $\mathrm{supp}(\psi_j)$ alle disjunkt sind, die Reihe $\psi(x)$ also an jedem Punkt (in einer Umgebung) aus höchstens einem Summanden besteht. Ferner gehen

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_j \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi$$

in $\mathscr{E}(\Omega)$. Doch dann ist

$$\langle v, \psi\rangle = \lim_{n\to\infty} \Big\langle v, \sum_{j=1}^{n} \psi_j \Big\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\langle v, \psi_j\rangle}_{1} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

ein Widerspruch zu $v \in \mathscr{E}'(\Omega)$.
□

Folgerung: Zusammen mit Fortsetzungssatz 2.3.1 folgt die Äquivalenz

$$\mathscr{E}'(\Omega) \cong \big\{u \in \mathfrak{D}'(\Omega) : \mathrm{supp}(u) \text{ kompakt in } \Omega\big\}$$

(vgl. Definition in [1]).

2.3.5 Definition: Ordnung einer Distribution

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit Ausschöpfungsfolge $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$. Dann existiert $\forall\ j \in \mathbb{N}$ ein $c_{j,u} > 0$ und (kleinstes) $l_{j,u} \in \mathbb{N}_0$ mit

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq c_{j,u} \cdot \|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j, l_{j,u}} \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega_j)$$

(ohne Beweis). Gilt $\sup_j l_{j,u} < \infty$, so heißt $l := \sup_j l_{j,u}$ *Ordnung* der Distribution u.

Beispiele:

(i) Jede reguläre Distribution u_f mit $f \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ hat Ordnung 0, denn

$$|\langle u_f, \varphi\rangle| = \Big|\int\limits_{\overline{\Omega}_j} f(x)\varphi(x)\ dx\Big| \le \underbrace{\sup_{x\in\overline{\Omega}_j} \|f(x)\| \cdot \mathrm{vol}(\overline{\Omega}_j)}_{c_{j,u_f}} \cdot \|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j,0} \ \ \forall\ \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_j)$$

(ii) Jede Distribution v mit kompaktem Träger besitzt endliche Ordnung, denn für $v \in \mathscr{E}'(\Omega)$ existiert ein $k_v \in \mathbb{N}$ mit

$$|\langle v, \psi\rangle| \le c \cdot \underbrace{\|\psi\|_{\overline{\Omega}_{k_v},k_v}}_{\substack{\le \|\psi\|_{\overline{\Omega}_j,k_v} \\ \forall\ j \ge k_v}} \ \ \forall\ \psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

(iii) Es gibt tatsächlich Distributionen der Ordnung ∞, nämlich:

$$\langle u, \psi\rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(k) \quad , \quad u \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$$

Beachte dass die Summe nach Voraussetzung an die Testfunktionen stets endlich ist. Dabei gilt

$$\operatorname{singsupp} u = \operatorname{supp} u = \mathbb{N}_0$$

Interpretation: Die Ordnung einer Distribution ist in einem gewissen Sinne ein Indiz darüber, welche Ableitungsordnungen der Testfunktionen bei deren *Auswertung* eine Rolle spielen.

3 Rechnen mit Distributionen

3.1 Produkte von Distributionen

3.1.1 Motivation

Zu offener $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ weiß man, dass jede lokal-integrierbare Funktion $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ gemäß

$$\langle u_f, \varphi \rangle := \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

eine Distribution $u_f \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ definiert. Zu $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ist dann auch $\eta f \in L_{1,\mathrm{loc}}$, wobei

$$\langle u_{\eta f}, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega f(x) \cdot \eta(x)\varphi(x)\, dx = \langle u_f, \underbrace{\eta\varphi}_{\in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)} \rangle \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

das heißt $u_{\eta f} : \varphi \mapsto \langle u_f, \eta\varphi \rangle$. Analoge Überlegungen gelten auch für $\mathscr{C}'(\Omega)$ mit $f \in L_{1,\mathrm{com}}(\Omega)$. Dies gibt Anlast zu folgender Definition.

3.1.2 Definition: Produkt von Distributionen mit $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen

Zu Distribution $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ (bzw. $u \in \mathscr{C}'(\Omega)$) und Funktion $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ definieren die Distribution

$$\langle \eta u, \varphi \rangle := \langle u, \eta\varphi \rangle \quad , \ \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \text{ (bzw. } \varphi \in \mathscr{C}(\Omega))$$

Bemerkungen:

(i) Die so definierte Abbildung ηu ist tatsächlich eine Distribution in $\mathfrak{D}'(\Omega)$ (bzw. $\mathscr{C}'(\Omega)$).
Beweis: Linearität ist klar. Für konvergente Folge $\varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ in $\mathscr{C}(\Omega)$ geht ohnehin auch $\eta\varphi_\nu \underset{\mathscr{C}(\Omega)}{\overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow}} \eta\varphi$ (vgl. Bemerkung (iii) in 1.3.6). Für $\varphi_\nu \underset{\mathfrak{D}(\Omega)}{\overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow}} \varphi$ geht ohnehin $\varphi_\nu \underset{\mathscr{C}(\Omega)}{\overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow}} \varphi$ das heißt $\eta\varphi_\nu \underset{\mathscr{C}(\Omega)}{\overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow}} \eta\varphi$, und da zusätzlich $\mathrm{supp}(\eta\varphi_\nu) \subset \mathrm{supp}(\varphi_\nu)$ gilt, ist sogar $\eta\varphi_\nu \underset{\mathfrak{D}(\Omega)}{\overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow}} \eta\varphi$. Demnach

$$\langle \eta u, \varphi_\nu \rangle = \langle u, \eta\varphi_\nu \rangle \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \langle u, \eta\varphi \rangle$$

(ii) Ist u_f regulär, erzeugt durch $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ (bzw. $f \in L_{1,\mathrm{com}}(\Omega)$), so ist $\eta \cdot u_f = f \cdot u_\eta = u_{\eta f}$.

(iii) Für $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega),\ \eta(x) \neq 0 \ \ \forall\, x \in \Omega$ und Distributionen u, v gilt: $\eta \cdot u = v \ \Leftrightarrow \ u = \frac{1}{\eta} \cdot v$.

(iv) Offensichtlich ist die Multiplikation mit $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen distributiv und assoziativ.

3.1.3 Satz über den Träger von Distributionprodukten

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X := \mathfrak{D}(\Omega)$ bzw. $X := \mathscr{C}(\Omega)$ bzw. $X := S(\mathbb{R}^n)$. Sei ferner $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ und $u \in X'(\Omega)$ eine Distribution. Dann:

1. Es gilt stets
$$\mathrm{supp}(\eta u) \subset \mathrm{supp}(\eta) \cap \mathrm{supp}(u)$$
Beachte dass die Aussage für reguläre, stetige Distributionen trivial ist.

2. Ist $\eta\big|_{\mathrm{supp}(u)} = 1$, so ist $\eta \cdot u = u$.

3. Ist $\mathrm{supp}(\varphi) \cap \mathrm{supp}(u) = \emptyset$ für Testfunktion $\varphi \in X(\Omega)$, so ist $\langle u, \varphi \rangle = 0$.

Beweis:

1. Zu einen ist

$$x \in \operatorname{supp}(\eta u) \Leftrightarrow \forall\, \delta > 0 : \exists\, \varphi \in X(B^o_\delta(x)) : \langle \eta u, \varphi \rangle \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, \delta > 0 : \exists\, \varphi \in X(B^o_\delta(x)) : \langle u, \eta\varphi \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, \delta > 0 : \exists\, \widetilde{\varphi} = \eta\varphi \in X(B^o_\delta(x)) : \langle u, \widetilde{\varphi} \rangle \neq 0 \Rightarrow x \in \operatorname{supp}(u)$$

das heißt $\operatorname{supp}(\eta u) \subset \operatorname{supp}(u)$. Zum anderen ist

$$x \notin \operatorname{supp}(\eta) \Leftrightarrow \exists\, \delta > 0 : \eta\big|_{B^o_\delta(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \exists\, B^o_\delta(x) : \forall\, \varphi \in X(B^o_\delta(x)) : \eta\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \exists\, B^o_\delta(x) : \forall\, \varphi \in X(B^o_\delta(x)) : \underbrace{\langle u, \eta\varphi \rangle}_{\eta u, \varphi} = 0 \Rightarrow x \notin \operatorname{supp}(\eta u)$$

das heißt $\operatorname{supp}(\eta u) \subset \operatorname{supp}(\eta)$.

2. Zu $\varphi \in X(\Omega)$ ist $\operatorname{supp}((1-\eta)u) \subset \operatorname{supp}(1-\eta) \cap \operatorname{supp}(u) = \emptyset$ und somit

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \eta\varphi + (1-\eta)\varphi \rangle = \langle \eta u, \varphi \rangle + \langle \underbrace{(1-\eta)u}_{0}, \varphi \rangle = \langle \eta u, \varphi \rangle$$

3. Ist $u \in \mathscr{C}'(\Omega)$ und $\varphi \in \mathscr{C}(\Omega)$ so folgt direkt

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle \underbrace{\varphi \cdot u}_{0}, 1 \rangle = 0$$

Ist anderseits $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ und $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, dann besitzt φ kompakten Träger, und es existiert ein $\eta \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ mit $\eta\big|_{\operatorname{supp}(\varphi)} = 1$, also $\eta\varphi = \varphi$ bzw.

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \eta\varphi \rangle = \langle \underbrace{\varphi u}_{0}, \eta \rangle = 0$$

Nach Lemma 1.3.8(3) (siehe Beweis) folgt die Behauptung auch für $u \in S'(\mathbb{R}^n),\ \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

□

3.1.4 Korollar über die lokale Wirkung von Distributionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $X = \mathfrak{D}(\Omega)$ oder $X = \mathscr{C}(\Omega)$ und $\varphi \in X$ eine Testfunktion. Dann hängt $\langle u, \varphi \rangle$ nur vom Verhalten von φ in einer (beliebig kleinen) Umgebung von $\operatorname{supp}(u)$ ab. Mit anderen Worten, sind $\varphi, \psi \in X$ mit $\varphi\big|_U = \psi\big|_U$ für irgendeine offene $U \operatorname{supp}(u)$, so gilt $\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \psi \rangle$.

Beweis: Seien $\varphi\big|_U = \psi\big|_U$ für irgendeine offene $U \supset \operatorname{supp}(u)$, dann ist $\operatorname{supp}(\varphi - \psi) \cap \operatorname{supp}(u) = \emptyset$. Nach Satz 3.1.3 folgt dann $\langle u, \varphi - \psi \rangle = 0$.
□

3.1.5 Beispiele von Distributionprodukten

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

1. Zu $x_0 \in \Omega$ und $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ist

$$\langle \eta\delta_{x_0}, \varphi\rangle = \langle \delta_{x_0}, \eta\varphi\rangle = \eta(x_0)\, \underbrace{\varphi(x_0)}_{\langle \delta_{x_0},\varphi\rangle} = \langle \eta(x_0)\delta_{x_0}, \varphi\rangle \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}'(\Omega)$$

das heißt

$$\eta \cdot \delta_{x_0} = \eta(x_0) \cdot \delta_{x_0}$$

2. Betrachten $\mathcal{P}_{\frac{1}{x}} \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$. Dann ist

$$\left\langle x\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}, \varphi\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}, x\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0 \to \infty} \int\limits_{\|x\| \geq \varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = \langle u_1, \varphi\rangle$$

3.1.6 Bemerkung zu allgemeineren Distributionenprodukten

Angesichts der obigen Produkt-Definition zwischen $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen und Distributionen, stellt sich die Frage ob diese sich auch auf beliebige Distributionen verallgemeinern lässt. Genauer formuliert: Existiert eine assoziative, kommutative Verknüpfung $\otimes : \mathfrak{D}'(\Omega) \times \mathfrak{D}'(\Omega) \to \mathfrak{D}'(\Omega)$ (bzw. für $\mathscr{C}'(\Omega)$) die den obigen Begriff verallgemeinert (d.h $\eta \cdot u = u_\eta \otimes u$ für $\eta \in \mathcal{C}^\infty$)?

Leider ist die Antwort darauf **nein**, denn sonst wäre:

$$0 = 0 \cdot \mathcal{P}_{\frac{1}{x}} = 0 \otimes \mathcal{P}_{\frac{1}{x}} = (x\delta_0) \otimes \mathcal{P}_{\frac{1}{x}} = \left(x\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}\right) \otimes \delta_0 = \underbrace{u_1 \otimes \delta_0}_{1\cdot\delta_0} = \delta_0$$

ein Widerspruch!

3.2 Differentiation von Distributionen

3.2.1 Vorbetrachtung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, dazu die erzeugte Distribution u_f in $\mathfrak{D}'(\Omega)$. Wegen $\frac{\partial f}{\partial x^j} \in \mathcal{C}(\Omega)$ ist auch $u_{\partial_j f} \in \mathfrak{D}'(\Omega)$, und es gilt

$$\left\langle u_{\partial_j f}, \varphi\right\rangle = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x^j}(x)\varphi(x)\, dx \overset{\text{Gauß}}{=} \underbrace{\int\limits_{\partial\Omega} f(y)\varphi(y) \cdot (n_y \cdot e_j)\, dy}_{\substack{0 \\ \text{da supp}(\varphi)\subset\Omega}} - \int\limits_{\Omega} f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}(x)\, dx = -\langle u_f, \partial_i\varphi\rangle \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

(n_y äußere Einheitsnormale an $y \in \partial\Omega$). Analoge Überlegungen gelten auch im Fall $f \in \mathcal{C}^1_0(\Omega)$, $\varphi \in \mathscr{C}(\Omega)$. Dies gibt Anlass zu folgender Definition.

3.2.2 Definition: Ableitung von Distributionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X := \mathscr{C}(\Omega)$ bzw. $X := \mathfrak{D}(\Omega)$ bzw. $X := S(\mathbb{R}^n)$. Dann definiert man zu beliebigem $u \in X'$ und Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die *verallgemeinerte Ableitung* (*Distributionsableitung*) von u gemäß

$$\langle D^\alpha u, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\, \langle u, D^\alpha\varphi\rangle \quad , \quad \varphi \in X$$

Bemerkung: Ist $\varphi \in X$, so ist auch $(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi \in X$. Die lineare Abbildung $D^\alpha u$ ist somit wohldefiniert. Tatsächlich handelt es sich bei $D^\alpha u$ sogar um eine Distribution in X', denn aus $\varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ folgt $D^\alpha\varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} D^\alpha\varphi$, das heißt

$$\langle D^\alpha u, \varphi_\nu\rangle = (-1)^{|\alpha|}\, \langle u, D^\alpha\varphi_\nu\rangle \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} (-1)^{|\alpha|}\, \langle u, D^\alpha\varphi\rangle = \langle D^\alpha u, \varphi\rangle$$

3.2.3 Eigenschaften der Distributionsableitung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X(\Omega) := \mathfrak{D}(\Omega)$ bzw. $X(\Omega) := \mathscr{E}(\Omega)$. Dann gilt:

1. Jede Distribution ist beliebige oft differenzierbar.
2. $D^\alpha : X'(\Omega) \to X'(\Omega)$ ist linear und erfüllt
$$D^\alpha D^\beta u = D^{\alpha+\beta} u \quad , \quad u \in X'(\Omega),\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$$
3. Zu $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ (bzw. $f \in \mathcal{C}_0^k(\Omega)$) und Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ |\alpha| \leq k$ ist
$$u_{D^\alpha f} = D^\alpha u$$
in $\mathfrak{D}'(\Omega)$ (bzw. $\mathscr{E}'(\Omega)$).
4. Leibnitz-Regel: Zu $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, Distribution $u \in X'(\Omega)$ und Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:
$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} (D^\beta \eta)(D^\gamma u)$$
5. Lokalität der Differentiation: Zu Distribution $u \in X'(\Omega)$ und Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist
$$\operatorname{supp}(D^\alpha u) \subset \operatorname{supp}(u)$$
6. Eine auf jeder kompakten Menge gleichmäßig konvergente Reihe lokal integrierbarer Funktionen
$$\sum_{l=1}^\infty f_l =: F \quad , \quad f_l \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$$
erzeugt eine in $\mathfrak{D}'(\Omega)$ beliebig oft differenzierbare und konvergente Reihe von Distributionen:
$$D^\alpha \sum_{l=1}^L u_{f_l} \underset{\text{schwach*}}{\overset{L\to\infty}{\longrightarrow}} D^\alpha u_F \quad , \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$
Formal also:
$$\sum_{l=1}^\infty D^\alpha u_{f_l} = D^\alpha \sum_{l=1}^\infty u_{f_l}$$

Beweis:

1. Klar, da Testfunktionen aus $\mathcal{C}^\infty$.
2. Gilt, da entsprechende Regel für Testfunktionen gilt.
3. Siehe Vorbetrachtung 3.2.1 und verwende Teil (2).
4. Beweis durch vollständige Induktion über $|\alpha|$, und Verwendung von
$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}(\eta u), \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \eta \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial}{\partial x^j}(\eta\varphi) - \frac{\partial \eta}{\partial x^j}\varphi \right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^j}, \eta\varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \eta}{\partial x^j} u, \varphi \right\rangle = \left\langle \eta \frac{\partial u}{\partial x^j} + \frac{\partial \eta}{\partial x^j} u, \varphi \right\rangle$$
5. Es gilt:
$$x \notin \operatorname{supp}(u) \Rightarrow \ \exists\ B_\delta^o(x) : \forall\ \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_\delta^o(x)) : \langle u, \varphi \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \ \exists\ B_\delta^o(x) : \forall\ \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_\delta^o(x)) : \langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \underbrace{D^\alpha \varphi}_{\in \mathcal{C}_0^\infty(B_\delta^o(x))} \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \ x \notin \operatorname{supp}(D^\alpha u)$$

6. Setzen
$$F_L := \sum_{l=1}^{L} f_l$$
Dann:
$$|\langle D^\alpha(u_{F_L} - u_F), \varphi\rangle| = \langle u_{F_L} - u_F, D^\alpha\varphi\rangle \overset{K:=\mathrm{supp}(\varphi)}{=} \left|\int_K (F_L(x) - F(x)) \cdot D^\alpha\varphi(x)\ dx\right|$$
$$\leq \int_K |(F_L(x) - F(x))\, D^\alpha\varphi(x)|\ dx \leq \underbrace{\sup_{x\in K} |F_L(x) - F(x)|}_{\overset{L\to\infty}{\longrightarrow} 0} \cdot \sup_{x\in K} |D^\alpha\varphi(x)| \cdot \mathrm{Vol}(K) \overset{L\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

3.2.4 Differentiationsbeispiele

(i) Zu endlicher Familie $(x_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}$ sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\mathbb{R} \setminus \{x_i\}_{i\in I}$ differenzierbar, lokal integrierbar, dazu die erzeugte Distribution $u_f \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$. Existieren die Grenzwerte
$$f(x_i + 0) := \lim_{\varepsilon\searrow 0} f(x_i + \varepsilon) \quad , \quad f(x_i - 0) := \lim_{\varepsilon\nearrow 0} f(x_i + \varepsilon) \quad , \quad i \in I$$
so gilt:
$$\frac{du_f}{dx} = u_{f'} + \sum_{i\in I} [f]_{x_i} \cdot \delta_{x_i} \quad , \quad [f]_{x_i} := f(x_i + 0) - f(x_i - 0)$$
Beweis: O.b.d.A sei $I = \{0\}$. Zu $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ ist
$$\left\langle u'_f, \varphi\right\rangle = -\left\langle u_f, \varphi'\right\rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\ dx = -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\ dx - \int_{x_0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\ dx$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to-\infty} f(x)\varphi(x)}_{\substack{0\\ \text{da supp}(\varphi)\text{ kompakt}}} - \lim_{x\nearrow x_0} f(x)\varphi(x) + \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)\ dx - \underbrace{\lim_{x\to\infty} f(x)\varphi(x)}_{\substack{0\\ \text{da supp}(\varphi)\text{ kompakt}}} + \lim_{x\searrow x_0} f(x)\varphi(x) + \int_{x_0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\ dx$$
$$= [f]_{x_0}\, \varphi(x_0) + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\ dx}_{\langle u_{f'},\varphi\rangle} = \left\langle u_{f'} + [f]_{x_0}\, \delta_{x_0}, \varphi\right\rangle$$
Bemerkung: Analoge Aussage gilt auch für den Fall $u_f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ falls $\mathrm{supp}(f)$ kompakt ist, der Beweis ist fast identisch.

(ii) **Spezialfall:** Die Heavisidesche Sprungfunktion
$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & : x \geq 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases} \tag{3.2.4.1}$$
$(x_0 = 0,\ [\Theta]_0 = 1)$ erzeugt eine reguläre Distribution in $\mathfrak{D}'(\Omega)$, mit
$$u'_\Theta = \delta_0$$

(iii) Ladungsdichte für einen im Ursprung liegenden Dipol mit elektrischem Moment 1, der Dichte:
$$\rho_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}\delta_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\delta_0$$

Machen nun den Übergang zu einem Punktdipol, das heißt betrachten $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\rho_\varepsilon$ (in $\mathscr{C}'(\mathbb{R})$):

$$\langle\rho_\varepsilon,\varphi\rangle = \frac{1}{\varepsilon}\left(\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)\right) \xrightarrow{\varepsilon\searrow 0} \varphi'(0) = \langle\delta_0,\varphi'\rangle = -\langle\delta_0',\varphi\rangle \quad , \quad \varphi\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$$

Der Punktdipol wird also beschrieben durch die Distribution (*Verteilung*) $-\delta_0'$. Ferner ist

$$\langle-\delta_0',1\rangle = \langle\delta_0,1'\rangle = \langle\delta_0,0\rangle = 0 \quad \text{(Gesamtladung)}$$

$$\langle-\delta_0',x\rangle = \langle\delta_0,x'\rangle = \langle\delta_0,1\rangle = 1 \quad \text{(Dipolmoment)}$$

(iv) Ladungsdichte für eine Punktdipolverteilung (stückweise stetige Dipoldichte ν, *Orientierung* entlang Flächennormale $\mathbf{n}$) auf einer glatten Fläche $S\subset\mathbb{R}^n$: Analog zum Punktdipol gegeben durch

$$\left\langle -\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\nu\delta_S),\varphi\right\rangle := \left\langle\nu\delta_S,\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right\rangle = \int\limits_S \nu(x)\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}(x)\,ds$$

Dabei ist tatsächlich $-\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\nu\delta_S)\in\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$.

(v) Die Reihe

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}$$

erzeugt die Distributionsreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_{2k\pi}$$

in $\mathfrak{D}'(\Omega)$ (vgl. Satz 3.2.3 (6)), den sogenannten *Dirac-Kamm*.
Beweis: Setzen die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{2}-\frac{x}{2\pi}\ ,\ 0\le x\le 2\pi$$

periodisch auf $\mathbb{R}$ fort, dann gilt analog zu (i):

$$u_f' = u_{f'} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{[f]_{2k\pi}}_{1}\delta_{2k\pi} = -u_{\frac{1}{2\pi}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_{2k\pi}$$

Entwickeln nun f_0 in die Fourierreihe

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{ikx}}_{\substack{\text{gleichmäßig}\\ \text{konvergent}}} \quad , \quad C_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \begin{cases}0 & : k=0\\ \frac{-i}{2k\pi} & : k\neq 0\end{cases}$$

Dann ist mit

$$f'(x) = \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2\pi}e^{ikx}}_{f_k'} \quad , \quad f_k := \begin{cases}\frac{-ie^{ikx}}{2\pi k} & : k\neq 0\\ \frac{x}{2\pi} & : k=0\end{cases}$$

entsprechend:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{u_{f_k'}}_{u_{f_k}'} = \underbrace{u_{f_0'}}_{u_{\frac{1}{2\pi}}} + \underbrace{\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}u_{f_k}'}_{\substack{\frac{d}{dx}\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}u_{f_k}\\ \text{nach 3.2.3 (6)}}} = u_{\frac{1}{2\pi}} + u_f' = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_{2k\pi}$$

(vi) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet[5] mit glattem Rand ∂G, dazu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit:

- $f\big|_G \in \mathcal{C}^1(G)$ ist stetig auf $\overline{G}$ fortsetzbar,
- $f\big|_{G^c} \in \mathcal{C}^1(G^c)$ ist stetig auf $\overline{G^c}$ fortsetzbar.

Sei definiert

$$[f]_{\partial G}(x) := \lim_{\substack{z \in G^c \\ z \to x}} f(z) - \lim_{\substack{y \in G \\ y \to x}} f(y) \quad , \quad x \in \partial G$$

Dann gilt:

$$\frac{\partial u_f}{\partial x^j} = u_{\partial_j f} + [f]_{\partial G} \cdot (n_x \cdot e_j) \cdot \delta_{\partial G}$$

mit der äußeren Einheitsnormalen n_x an der Stelle $x \in \partial G$.
Beweis: Analog zu (i) mit Satz von Gauß und

$$\langle \mu \delta_{\partial G}, \varphi \rangle := \int_{\partial G} \mu(x)\varphi(x)\; ds$$

3.2.5 Der Laplace-Integralkern

Betrachten den so genannten *Integralkern* des Laplace-Operators:

$$\mathcal{E}_n(x) := \begin{cases} (2\pi)^{-1} \ln \|x\| & : n = 2 \\ -\dfrac{1}{(n-2)\,\mathrm{Vol}(\partial B_1^n)} \cdot \dfrac{1}{\|x\|^{n-2}} & : n \geq 3 \end{cases}$$

Beachte dass $\mathcal{E}_n \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ist, denn

$$\int_{\|x\| \leq \varepsilon} \mathcal{E}_n(x)\; dx \sim \int_{\|x\| \leq \varepsilon} \frac{dx}{\|x\|^{n-2}} \overset{\text{Kugelkoordinaten}}{\sim} \int_{\partial B_1^n} \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{r^{n-2}} dr\; ds$$

so dass $\mathcal{E}_n$ eine Distribution $u_{\mathcal{E}_n} \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ erzeugt.
Behauptung:

$$\boxed{\Delta u_{\mathcal{E}_n} = \delta_0} \tag{3.2.5.1}$$

Beweis: Betrachten o.B.d.A den Fall $n \geq 3$. Bekanntlich ist $\Delta \mathcal{E}_n(x) = 0$ für $x \neq 0$. Definitionsgemäß ist für $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle \Delta u_{\mathcal{E}_n}, \varphi \rangle \overset{\text{def.}}{=} \langle u_{\mathcal{E}_n}, \Delta\varphi \rangle = -\underbrace{\frac{1}{(n-2)\,\mathrm{Vol}(\partial B_1^n)}}_{\varkappa} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\|x\|^{n-2}} \Delta\varphi(x)\; dx = -\varkappa \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[\int_{\|x\| \geq \varepsilon} \frac{1}{\|x\|^{n-2}} \Delta\varphi(x)\; dx \right]$$

$$\overset{\text{Green}}{=} \varkappa \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ -\int_{\|x\| \geq \varepsilon} \underbrace{\Delta \left[\frac{1}{\|x\|^{n-2}} \right]}_{0} \varphi(x)\; dx + \int_{\|x\| = \varepsilon} \frac{1}{\|x\|^{n-2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \|x\|}(x) \; - \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \|x\|} \left[\frac{1}{\|x\|^{n-2}} \right] ds \right\}$$

wobei die Greensche Formel

$$\int_G (g\Delta f - f\Delta g)\; dx = \int_{\partial G} \left(g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} - f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right) ds$$

[5] Ein *Gebiet* ist eine offene, nichtleere, zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes.

für beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ und $2\times$ partiell differenzierbare $f, g : G \to \mathbb{R}$ verwendet wurde (beachte dass φ beschränkten Träger besitzt). Wegen

$$\left| \int\limits_{\|x\|=\varepsilon} \frac{1}{\|x\|^{n-2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \|x\|}(x)\ ds \right| = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \left| \int\limits_{\|x\|=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \|x\|}(x)\ ds \right| \le \frac{\mathrm{Vol}(\partial B_1^n)\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-2}} \cdot \sup_{\|x\|=\varepsilon} \underbrace{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \|x\|}(x) \right|}_{<\infty} \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0$$

ist

$$\langle \Delta u_{\mathcal{E}_n}, \varphi \rangle = -\varkappa \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{\|x\|=\varepsilon} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \|x\|} \left[\frac{1}{\|x\|^{n-2}} \right] ds = \varkappa(n-2) \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int\limits_{\|x\|=\varepsilon} \varphi(x) ds$$

Wegen

$$\frac{|\overbrace{\varphi(x) - \varphi(0)}^{\psi(x)}|}{\|x\|} \in \mathcal{O}(\|x\|)$$

kann man für $\varepsilon_0 > 0$ klein genug und Konstante $M > 0$ abschätzen

$$\frac{|\psi(x)|}{\|x\|} \le M \quad \forall\ 0 < \|x\| \le \varepsilon_0$$

(alternativ folgt die Behauptung aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Insbesondere:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left| \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int\limits_{\|x\|=\varepsilon} \psi(x) ds \right| \le \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{M}{\varepsilon^{n-1}} \underbrace{\int\limits_{\|x\|=\varepsilon} \|x\|\ ds}_{\varepsilon \cdot \mathrm{Vol}(\partial B_1^n)\varepsilon^{n-1}} = 0$$

Eingesetzt ergibt

$$\langle \Delta u_{\mathcal{E}_n}, \varphi \rangle = \varkappa(n-2) \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \left[\int\limits_{\|x\|=\varepsilon} \varphi(0)\ ds + \int\limits_{\|x\|=\varepsilon} \psi(x)\ ds \right]$$

$$= \varkappa(n-2) \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \underbrace{\int\limits_{\|x\|=\varepsilon} \varphi(0)\ ds}_{\mathrm{Vol}(\partial B_1^n)\varepsilon^{n-1}\varphi(0)} = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

□

3.2.6 Integralkern der Wellengleichung

Betrachten den Integralkern (*Fundamentallösung*)

$$\mathcal{W}(x,t) := \frac{1}{2c} \Theta(ct - |x|)$$

der 1-dimensionalen Wellengleichung

$$\underbrace{\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]}_{\Box} U = f$$

Offensichtlich ist $\mathcal{W}$ lokal-integrierbar.

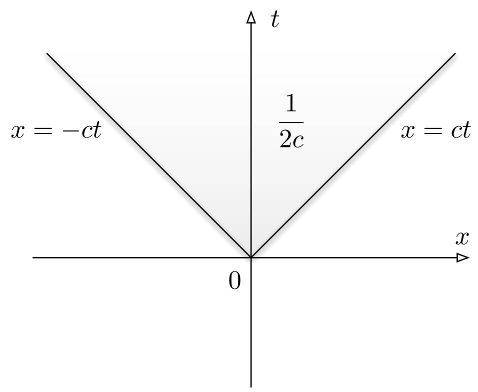

Abbildung 3: Zur Definition des Integralkerns der Wellengleichung.

Als Funktion ist $\mathcal{W}$ nicht differenzierbar, als Distribution in $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ jedoch schon. Dabei gilt:

$$\boxed{\Box u_{\mathcal{W}} = \delta_0} \tag{3.2.6.1}$$

Beweis: Für Testfunktion $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ ist

$$\left\langle \Box\mathcal{W}, \varphi \right\rangle \overset{\text{def.}}{=} \langle \mathcal{W}, \Box\varphi \rangle = \frac{1}{2c} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\frac{|x|}{c}}^{\infty} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(x,t)\ dt\ dx - c \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{-ct}^{ct} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\ dx\ dt$$

$$= \frac{1}{2c} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,\infty)}_{0} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\big(x, \tfrac{|x|}{c}\big) \Big] - \frac{c}{2} \int\limits_{0}^{\infty} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(ct,t) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}(-ct,t) \right]\ dt$$

$$= \frac{1}{2c} \int\limits_{0}^{\infty} -\frac{\partial\varphi}{\partial t}\big(x, \tfrac{x}{c}\big)\ dx - \frac{1}{2c} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial\varphi}{\partial t}\big(x, -\tfrac{x}{c}\big)\ dx - \frac{c}{2} \int\limits_{0}^{\infty} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(ct,t) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}(-ct,t) \right]\ dt$$

$$= -\frac{1}{2} \underbrace{\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t}(cy,y)\ dy}_{y := \frac{x}{c}} - \frac{1}{2} \underbrace{\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t}(-cy,y)\ dy}_{y := -\frac{x}{c}} - \frac{c}{2} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(cy,y)\ dy + \frac{c}{2} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(-cy,y)\ dy$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{d}{dy}\varphi(cy,y)\ dy - \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{d}{dy}\varphi(-cy,y)\ dy$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\underbrace{\varphi(c\cdot\infty,\infty)}_{0} - \varphi(c\cdot 0, 0) + \underbrace{\varphi(-c\cdot\infty,\infty)}_{0} - \varphi(-c\cdot 0,0) \Big] = \varphi(0,0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

Interpretation: Die Fundamentallösung $\mathcal{W}$ (bzw. $u_{\mathcal{W}}$) kann als *verallgemeinerte* Lösung der Wellengleichung mit *Quelle* δ_0 interpretiert werden. Sie stellt gewissermaßen die *Welle* dar, die durch einen pulsartigen *Anstoß* im Ursprung $x = 0$ zur Zeit $t = 0$ erzeugt wird. Zu erkennen ist die niemals verschwindende Singularität der Lösung entlang der *Wellenfront* $|x| = ct$:

$$\operatorname{singsupp}(\mathcal{W}) = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 : ct = |x| \right\}$$

Im Gegensatz dazu, führt eine ähnliche Punktquelle δ_0 bei der Laplace-Gleichung $\Delta\mathcal{E}_n = \delta_0$ zu einer *glätteren* Lösung, im Sinne dass

$$\operatorname{singsupp}(\mathcal{E}_n) = \{0\}$$

Die Quellen-Singularität wird sozusagen im Raum *breitgeschmiert*. Dies ist tatsächlich ein fundamentaler Unterschied zwischen parabolischen (e.g. Laplace-Gleichung) und hyperbolischen (e.g. Wellengleichung) Differentialgleichungen!

3.3 Koordinatentransformationen von Distributionen

3.3.1 Vorbetrachtung

Sei $f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ eine die Distribution $u_f \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ erzeugende, lokal integrierbare Funktion. Betrachten sei die affine Abbildung

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad , \quad Tx := Ax + b \ , \ A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \ b \in \mathbb{R}^n$$

dazu die Transformation

$$f \mapsto f \circ T$$

Diese induziert entsprechend eine Transformation der Distribution:

$$\langle u_{fT}, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(Tx)\varphi(x)\, dx = \frac{1}{|\det(A)|} \int\limits_{T(\mathbb{R}^n)} f(y)\varphi(T^{-1}y)\, dy \overset{T(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n}{=} \left\langle u_f, \frac{\varphi \circ T^{-1}}{|\det(A)|} \right\rangle \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$$

Allgemeiner seien $\widetilde{\Omega}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ und $\tau : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus[6] und

$$\left|\det\left(\frac{\partial \tau^{-1}}{\partial y}\right)\right| \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

Dann ist $f \circ \tau \in L_{1,\text{loc}}(\widetilde{\Omega})$ wieder lokal integrierbar[7] und $u_{f\tau}$ wird zu eine Distribution in $\mathfrak{D}'(\widetilde{\Omega})$:

$$\langle u_{f\tau}, \varphi \rangle = \Big\langle u_f, \underbrace{\left|\det\left(\frac{\partial \tau^{-1}}{\partial y}\right)\right| \cdot \overbrace{(\varphi \circ \tau^{-1})}^{\in\mathfrak{D}(\Omega)}}_{\in\mathfrak{D}(\Omega)} \Big\rangle \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\widetilde{\Omega})$$

Ganz analoge Überlegungen gelten auch für $f \in L_{1,\text{com}}(\Omega)$. Dies gibt Anlass zu folgender Definition.

3.3.2 Definition: Koordinatentransformation von Distributionen

Seien $\widetilde{\Omega}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\tau : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus mit

$$\left|\det\left(\frac{\partial \tau^{-1}}{\partial y}\right)\right| \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

Sei $X(\Omega) = \mathfrak{D}(\Omega)$ oder $X(\Omega) = \mathscr{C}(\Omega)$ und $u \in X'(\Omega)$ eine Distribution. Dann definiert man:

$$\langle u \circ \tau, \varphi \rangle := \left\langle u, \left|\det\left(\frac{\partial \tau^{-1}}{\partial y}\right)\right| \cdot \left(\varphi \circ \tau^{-1}\right) \right\rangle \quad , \quad \varphi \in X(\widetilde{\Omega})$$

Bemerkungen:

(i) $u \circ \tau$ ist tatsächlich eine Distribution. Linearität ist klar. Ist anderseits $\varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ in $X(\widetilde{\Omega})$ so gehen

$$\left|\det\left(\frac{\partial \tau^{-1}}{\partial y}\right)\right| \cdot \left(\varphi_\nu \circ \tau^{-1}\right) \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \left|\det\left(\frac{\partial \tau^{-1}}{\partial y}\right)\right| \cdot \left(\varphi \circ \tau^{-1}\right)$$

in $X(\Omega)$ (vgl. 1.3.6 Bemerkung (v)), das heißt $\langle u \circ \tau, \varphi_\nu \rangle \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \langle u \circ \tau, \varphi \rangle$.

(ii) Ist u_f regulär, erzeugt durch $f \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ bzw. $f \in L_{1,\text{com}}(\Omega)$, so ist $u_f \circ \tau = u_{f\tau}$ auch regulär, erzeugt durch $f \circ \tau \in L_{1,\text{loc}}(\widetilde{\Omega})$ bzw. $f \circ \tau \in L_{1,\text{com}}(\widetilde{\Omega})$.

[6] Ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus $\tau : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ ist eine Bijektion mit $\tau, \tau^{-1} \in \mathcal{C}^k$.
[7] Beachte dass stetige Abbildungen kompakte Mengen auf kompakte Mengen abbilden.

3.3.3 Satz: Distributionen mit einem Punktspektrum

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \Omega$ und $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}(u) = \{x_0\}$. Dann existieren $N \in \mathbb{N}$ und $c_\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$u = \sum_{|\alpha| \le N} c_\alpha \cdot \partial^\alpha \delta_{x_0}$$

Bemerkung: Nach Lemma 1.3.8(3) folgt der Satz auch für $u \in \mathscr{E}'(\Omega), S'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Sei $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Ausschöpfungsfolge von Ω. Nach Fortsetzungssatz 2.3.1 kann u o.B.d.A. als Element aus $\mathscr{E}'(\Omega)$ betrachtet werden. Dann existieren k und c mit

$$|\langle u, \psi\rangle| \le c \cdot \|\psi\|_{\overline{\Omega}_k, k} \quad \forall\ \psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

[1]. O.B.d.A sei $x_0 = 0$ und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein dass $B^o_{2\varepsilon}(x_0) \subset \Omega$. Nach Existenzlemma 1.4.4 existiert ein $h \in \mathcal{C}^\infty_0(B^o_{2\varepsilon}(x_0))$ mit $h(x) = 1$ für $\|x\| \le \varepsilon$. Entsprechend gilt für

$$h_j(x) := h\left(2^j x\right)$$

dass $h_j(x) = 1$ für $\|x\| \le 2^{-j}\varepsilon$. Schreibt man

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha|\le N} \frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha\varphi)(0)x^\alpha + r(x)$$

für $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ und $N := k$ mit der Restgliedabschätzung

$$|r(x)| \le c' \cdot \|x\|^{N+1} \qquad \text{bzw.} \qquad |\partial^\gamma r(x)| \le c'' \cdot \|x\|^{N+1-|\gamma|}$$

(beachte dass $\operatorname{supp}(\varphi)$ kompakt) so gilt zum einen

$$|\partial^\gamma(h_j\cdot r)(x)| = \Big|\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \underbrace{C_{\alpha,\beta}}_{\text{const}}\partial^\alpha h_j(x)\cdot\partial^\beta r(x)\Big| \le \sum_{\alpha+\beta=\gamma}|C_{\alpha,\beta}|\cdot \underbrace{|\partial^\alpha h_j(x)|}_{\substack{\le \sup\limits_{\|x\|\le 2\varepsilon}|\partial^\alpha h(x)|\cdot 2^{j|\alpha|} \\ \text{da}\operatorname{supp}(h)\subseteq B^o_{2\varepsilon}(0)}} \cdot \underbrace{\left|\partial^\beta r(x)\right|}_{\substack{\le c''\left|\varepsilon\cdot 2^{-j}\right|^{N+1-|\beta|} \\ \text{für } x\in\operatorname{supp}(h_j)}}$$

$$\le \sum_{\alpha+\beta=\gamma}\underbrace{C_{\alpha,\beta,\gamma}}_{\text{const}}\cdot 2^{j|\alpha|}\cdot\left|\varepsilon\cdot 2^{-j}\right|^{N+1-|\beta|} \le \underbrace{C_\gamma}_{\text{const}}\cdot 2^{j|\gamma|}\cdot 2^{-j(N+1)}$$

$$\overset{|\gamma|\le k}{\le} \underbrace{C'_k}_{\text{const}}\cdot\underbrace{2^{jk}\cdot 2^{-j(N+1)}}_{\substack{2^{-j}\\ \text{da } k=N}}$$

und dementsprechend

$$|\langle u, h_j r\rangle| \le c\cdot\|h_j\cdot r\|_{\overline{\Omega}_k,k} \le \widetilde{c}_k\cdot 2^{-j}$$

Wegen $h\big|_{\operatorname{supp} u},\ h_j\big|_{\operatorname{supp} u} = 1$ ist nach Satz 3.1.3 stets $hu = h_j u = u$, das heißt

$$|\langle u, hr\rangle| = |\langle u, h_j r\rangle| \le \widetilde{c}_k\cdot 2^{-j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Somit:

$$\langle u,\varphi\rangle = \langle u, h\varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\le N}\frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha\varphi)(0)\underbrace{\langle u, hx^\alpha\rangle}_{\text{const}_\alpha} + \underbrace{\langle u, hr\rangle}_{0} = \sum_{|\alpha|\le N}\underbrace{\frac{\langle u, hx^\alpha\rangle}{\alpha!}(-1)^\alpha}_{c_\alpha}\cdot\langle\partial^\alpha\delta_0,\varphi\rangle$$

□

3.3.4 Bemerkung: Multiplikation von δ-Distributionen

Gesucht sei eine Distributionenalgebra mit den Operationen

i. Differentiation

ii. Multiplikation

iii. Variablentransformation

die im Falle regulärerer Distributionen (*klassische Funktionen*) mit den üblichen Rechenregeln übereinstimmen. Dann kann z.B. δ_0^2 ($\delta \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$) nicht sinnvoll definiert werden.

Erläuterung: Unter der sinnvollen Forderung $\operatorname{supp}(\delta_0^2) = \{0\}$ erhält man nach Satz 3.3.3 die Darstellung

$$\delta_0^2 = \sum_{l=0}^{N} c_l \partial^l \delta_0$$

Sei $\lambda \neq 0$, dann induziert λ die Koordinatentransformation

$$\left\langle \delta_0^2(\lambda x), \varphi \right\rangle = \left\langle \delta_0^2, \varphi\left(\lambda^{-1}x\right)\frac{1}{|\lambda|}\right\rangle = \sum_{l=0}^{N} c_l (-1)^l \left\langle \delta_0, \partial^l \left(\varphi(\lambda^{-1}x)\right)\frac{1}{|\lambda|}\right\rangle$$

$$= \sum_{l=0}^{N} c_l (-1)^l \frac{\lambda^{-l}}{|\lambda|} (\partial^l \varphi)(0) = \sum_{l=0}^{N} c_l \frac{\lambda^{-l}}{|\lambda|} \left\langle \partial^l \delta_0, \lambda \right\rangle$$

also

$$\delta_0^2(\lambda x) = \sum_{l=0}^{N} c_l \frac{\lambda^{-l}}{|\lambda|} \partial^l \delta \tag{3.3.4.1}$$

Anderseits ist

$$\delta_0(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|}\delta_0(x)$$

bzw.

$$\delta_0^2(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|^2}\delta_0^2(x) = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{l=0}^{N} c_l \partial^l \delta \tag{3.3.4.2}$$

Vergleich[8] mit (3.3.4.1) liefert

$$c_l \frac{\lambda^{-l}}{|\lambda|} = c_l \lambda^{-2} \quad \forall\ l = 0, .., N$$

Insbesondere $c_l = 0\ \forall\ l$, was keinen Sinn ergibt!

3.4 Faltung von Funktionen

3.4.1 Definition: Faltung von Funktionen

Zu Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiert man die *Faltung* $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\ dy \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

insofern das Integral für fast alle x existiert und endlich ist.

[8] Es können immer Testfunktionen $\varphi_0, .., \varphi_N \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ gefunden werden mit $\varphi_i^{(i)}\big|_0 \neq 0$ und $\varphi_i^{(j)}\big|_0 = 0$ für $i < j$. Diese eingesetzt reduzieren den Vergleich der Summe auf einen Koeffizientenvergleich.

Bemerkungen:

(i) Für $f,g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ existiert $f*g$ und es gilt sogar $f*g \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Allgemeiner: Nach Young gilt die Ungleichung[9]

$$\|f*g\|_{L_r} \leq \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_q}$$

für

$$1 \leq p,q,r \leq \infty \quad , \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$$

So ist z.B. für $f \in L_1, g \in L_\infty$:

$$(f*g) \in L_\infty$$

(iii) Insbesondere existiert $f*g$ für $f,g \in S(\mathbb{R}^n)$ bzw. $f,g \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$.

(iv) Anderseits ist für beide f,g eine *Wachstumsbeschränkung* notwendig. So existiert z.B. für

$$f(x) := e^{-\|x\|^2} \;,\; g(x) := e^{\|x^2\|}$$

die Faltung $f*g$ <u>nicht</u>.

3.4.2 Lemma: Eigenschaften der Faltung

Es seien $\varphi,\psi,\chi \in S(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

1. $(\varphi*\psi) = (\psi*\varphi)$
2. $(\varphi*\psi)*\chi = \varphi*(\psi*\varphi)$
3. $D^\alpha(\varphi*\psi) = (D^\alpha\varphi)*\psi = \varphi*(D^\alpha\psi)$
4. $(\varphi*\psi) \in S(\mathbb{R}^n)$

Beweis: Aussagen (1), (2) & (3) sind klar. Für Aussage (4) sei notiert die allgemeine Ungleichung für Normen:

$$(1+\|x\|^2) \leq \left[1+(\|x-y\|+\|y\|)^2\right] \leq \left[1+2\left(\|x-y\|^2+\|y\|^2\right)\right] \leq 2\left[1+\|x-y\|^2\right]\cdot\left[1+\|y\|^2\right] \tag{3.4.2.1}$$

Nach Definition (1.3.2.1) von $S(\mathbb{R}^n)$ ist zu zeigen dass

$$\|\varphi*\psi\|_{k,j} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1+\|x\|^2\right)^{\frac{j}{2}}\sum_{|\alpha|\leq k}|D^\alpha(\varphi*\psi)(x)| < \infty \quad \forall \;\; k,j \in \mathbb{N}_0$$

[9] Zu Maßraum $(\Omega,\mathfrak{S},\mu)$ und Banachraum $(X,\|\cdot\|)$ heißt eine messbare Abbildung $f:\omega\to X$ *wesentlich beschränkt*, wenn es eine Zahl $R>0$ gibt so dass

$$\mu\left(x\in\Omega : \|f(x)\| > R\right) = 0$$

ist, das heißt es existiert ein beschränkter Repräsentant in der Äquivalenzklasse von f. Dabei heißt R *wesentliche Schranke* von f und

$$\|f\|_{L_\infty} := \text{ess sup}\,\|f\| = \inf\{M>0 : M \text{ wesentliche Schranke}\} = \inf_{\substack{N\in\mathfrak{S}\\ \mu(N)=0}}\sup_{x\in\Omega/N}\|f(x)\|$$

wesentliches Supremum von f. Die Menge aller wesentlich beschränkten Funktionen $f:\Omega\to X$ bezeichnet man mit $L_\infty(\Omega,X)$.

Seien nun $j \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig, dann können wir abschätzen

$$\left(1+\|x\|^2\right)^{\frac{j}{2}} |\underbrace{D_x^\alpha(\varphi * \psi)}_{(D^\alpha\varphi)*\psi}(x)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(1+\|x\|^2\right)^{\frac{j}{2}} |D_x^\alpha \varphi(x-y)| \cdot |\psi(y)| \, dy$$

$$\overset{(3.4.2.1)}{\leq} \int\limits_{\mathbb{R}^n} 2^{\frac{j}{2}} \underbrace{\left(1+\|x-y\|^2\right)^{\frac{j}{2}} |D_x^\alpha \varphi(x-y)|}_{\leq \|\varphi\|_{|\alpha|,j}} \cdot \underbrace{\left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{j}{2}} \left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{n+1}{2}} |\psi(y)|}_{\leq \|\psi\|_{0,j+n+1}} \left(1+\|y\|^2\right)^{-\frac{n+1}{2}} dy$$

$$\leq 2^{\frac{j}{2}} \|\varphi\|_{|\alpha|,j} \|\psi\|_{0,j+n+1} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(1+\|y\|^2\right)^{-\frac{n+1}{2}} dy}_{C_n < \infty}$$

das heißt

$$\|\varphi * \psi\|_{k,j} \leq C \cdot \|\varphi\|_{k,j} \cdot \|\psi\|_{0,j+n+1} < \infty \quad \forall\, k,j \in \mathbb{N}_0$$

□

3.5 Fouriertransformation von Funktionen

3.5.1 Definition: Fouriertransformierte

Sei $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt

$$\widetilde{\varphi}(\xi) := \mathcal{F}(\varphi)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \varphi(x) \, dx$$

Fouriertransformierte von φ.

Bemerkung: Die Definition ist sinnvoll, denn das Integral existiert immer und ist endlich:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-ix\xi}\varphi(x)\right| \, dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \, dx}_{\|\varphi\|_{L_1}} < \infty$$

Insbesondere kann man abschätzen

$$\|\mathcal{F}(\varphi)\|_\infty \leq \text{const} \cdot \|\varphi\|_{L_1} \tag{3.5.1.1}$$

Beispiel: Sei $\widetilde{f}$ die Fouriertransformierte von $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ auf $\mathbb{R}$, das heißt

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Dann ist

$$\frac{d\widetilde{f}}{d\xi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} (-ix) e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} i \frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) e^{-ix\xi} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} (-i) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx}\left(e^{-ix\xi}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-i\xi) e^{-i\xi x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= -\xi \cdot \widetilde{f}(\xi)$$

Anderseits besitzt $\widetilde{f}$ den *Anfangswert*

$$\widetilde{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{\sqrt{2\pi}} = 1$$

und somit die eindeutige Lösung

$$\widetilde{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

Allgemeiner: Nach Fubini erhält man aus dem 1-dimensionalen Fall

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}\right](\xi) = e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}} \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{3.5.1.2}$$

in $\mathbb{R}^n$.

3.5.2 Beispiel: Das Abtasttheorem

Die Fouriertransformierte von $1_{[-N,N]}$ ergibt sich gemäß

$$\widetilde{1}_{[-N,N]}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-ix\xi} dx = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(N\xi)}{\xi} & : \xi \neq 0 \\ N\sqrt{\frac{2}{\pi}} & : \xi = 0 \end{array} \right\} \overset{\text{formal}}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(N\xi)}{\xi} \tag{3.5.2.1}$$

Daraus ergibt sich folgender Zusammenhang mit dem Abtasttheorem: Sei $\widetilde{f}$ stückweise stetig und bandbegrenzt, das heißt $\widetilde{f}(\xi) = 0$ für $|\xi| > \alpha$. Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right) \frac{\sin(\alpha x - k\pi)}{\alpha x - k\pi}$$

Beweis: Zum Beweis wird eine Variante der Fouriertransformation für Funktionen mit kompaktem Träger verwendet. Er lässt sich etwa wie folgt skizzieren:

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(\xi) &= \chi_{[-\alpha,\alpha]}\widetilde{f}(\xi) \\
&= \chi_{[-\alpha,\alpha]}(\xi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\alpha} \int_{[-\alpha,\alpha]} \widetilde{f}(\eta) e^{i\eta k\frac{\pi}{\alpha}} d\eta \; e^{i\xi k\frac{\pi}{\alpha}} \\
&\overset{3.2.4(v)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right) \frac{\sqrt{2\pi}}{2\alpha} \chi_{[-\alpha,\alpha]}(\xi) e^{i\xi k\frac{\pi}{\alpha}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right) \frac{\sqrt{2\pi}}{2\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \chi_{[-\alpha,\alpha]}(\xi) e^{i\xi k\frac{\pi}{\alpha}} d\xi$$

3.5.3 Rechenregeln der Fouriertransformation

Für $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt:

1. $\partial^\alpha \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}\left(x \mapsto (-ix)^\alpha \varphi(x)\right)(\xi)$ für Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.
2. $(i\xi)^\alpha \cdot \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}(\partial^\alpha \varphi)(\xi)$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.
3. $\mathcal{F}(x \mapsto \varphi(\lambda x))(\xi) = |\lambda|^{-1} \mathcal{F}(\varphi)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$ für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
4. $\mathcal{F}\left(x \mapsto \varphi(x+y)\right)(\xi) = e^{iy\xi} \cdot \mathcal{F}(\varphi)(\xi)$ für $y \in \mathbb{R}^n$.

Beweis:

1.
$$\partial^\alpha \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \partial_\xi^\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\varphi(x)\, dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (-ix)^\alpha e^{-ix\xi}\varphi(x)\, dx = \mathcal{F}\left(x \mapsto (-ix)^\alpha \varphi(x)\right)(\xi)$$

2.
$$(i\xi)^\alpha \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (i\xi)^\alpha e^{-i\xi x}\varphi(x)\, dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(-1)^{|\alpha|}} \partial_x^\alpha \left(e^{-ix\xi}\right)\varphi(x)\, dx$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(-1)^{|\alpha|}} e^{-ix\xi} \partial_x^\alpha \varphi(x)\, dx = \mathcal{F}(\partial^\alpha \varphi)(\xi)$$

3.
$$\mathcal{F}\left(\varphi(\lambda\cdot)\right)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\varphi(\lambda x)\, dx \overset{y:=\lambda x}{=} |\lambda|^{-1} \underbrace{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\xi}{\lambda}x}\varphi(y)\, dy}_{\mathcal{F}(\varphi)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)}$$

4.
$$\mathcal{F}\left(\varphi(\cdot + y)\right)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\varphi(x+y)\, dx \overset{z:=x+y}{=} \underbrace{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(z-y)\xi}\varphi(z)\, dz}_{e^{iy\xi}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)}$$

3.5.4 Satz über die Fouriertransformation

1. Die Fouriertransformation ist eine lineare & stetige Abbildung $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$.
2. Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung

$$\mathcal{F}^{-1}\big(\widetilde{\psi}\big)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \cdot \widetilde{\psi}(\xi)\, d\xi = \mathcal{F}\big(\widetilde{\psi}\big)(-x)$$

Beweis:

1. Linearität ist klar.
   Zeigen nun $\mathcal{F}(\varphi) \in S(\mathbb{R}^n)$ für $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Glattheit von $\mathcal{F}(\varphi)$ ist klar. Nach den Rechenregeln 3.5.3 genügt es nun zu zeigen $\|\mathcal{F}(\varphi)\|_\infty < \infty$, denn dann wäre

$$\left|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \widetilde{\varphi}(\xi)\right| \overset{(3.5.3)}{=} \left|(-i)^{|\alpha+\beta|}\mathcal{F}[\underbrace{\partial_x^\alpha \left(x^\beta \varphi\right)}_{\in S(\mathbb{R}^n)}](\xi)\right| \leq \left\|\mathcal{F}[\partial_x^\alpha \left(x^\beta\varphi\right)]\right\|_\infty < \infty \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$$

   und nach 1.3.2 (v) $\mathcal{F}(\varphi) \in S(\mathbb{R}^n)$. Tatsächlich ist

$$|\mathcal{F}(\varphi)(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left|e^{-ix\xi}\right|}_{1} |\varphi(x)|\, dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \|\varphi\|_1 \overset{(1.3.4.1)}{<} \infty \qquad (\spadesuit)$$

   Zu zeigen: Stetigkeit von $\mathcal{F}$. Für $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\left\|x^\alpha \partial^\beta \widetilde{\varphi}(\xi)\right\|_\infty \overset{(3.5.3)}{=} \left|(-i)^{|\alpha|+|\beta|}\mathcal{F}\left[\partial^\alpha \left(x^\beta\varphi\right)\right](\xi)\right| \overset{(\spadesuit)}{\leq} \text{const} \cdot \left\|\partial^\alpha \left(x^\beta \varphi\right)\right\|_1$$

   Sind $\varphi_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ in $S(\mathbb{R}^n)$, so gehen nach (1.3.4.1) $\left\|\partial^\alpha(x^\beta(\varphi_\nu - \varphi))\right\|_1 \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$ also

$$\left\|x^\alpha \partial^\beta(\widetilde{\varphi}_\nu - \widetilde{\varphi})\right\|_\infty \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

   bzw. $\widetilde{\varphi}_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\varphi}$.

2. Zur Bijektivität von $\mathcal{F}$ genügt es zu zeigen dass gilt

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \cdot \widetilde{\varphi}(\xi)\ d\xi$$

denn dann folgt automatisch:

- Surjektivität $\mathcal{F}(S(\mathbb{R}^n)) = S(\mathbb{R}^n)$, denn zu $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ wähle $\varphi(x) := \widetilde{\psi}(-x)$, dann:

$$\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \cdot \widetilde{\psi}(\xi)\ d\xi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \cdot \underbrace{\widetilde{\psi}(-\xi)}_{\varphi(x)}\ d\xi = \mathcal{F}(\varphi)(x)$$

- Injektivität, denn $\mathrm{kernel}(\mathcal{F}) = \{0\}$.

Bemerke, dass das Integral

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\xi}\varphi(y)\ dy\ d\xi$$

im allgemeinen nicht existiert!

Vorüberlegung: Für $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt stets

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\widetilde{\varphi}}_{\in S(\mathbb{R}^n)}(\xi) \cdot \psi(\xi) e^{ix\xi}\ d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \cdot \underbrace{\widetilde{\psi}}_{\in S(\mathbb{R}^n)}(y-x)\ dy \tag{3.5.4.1}$$

denn

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\varphi}(\xi)\psi(\xi)e^{ix\xi}d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi}\varphi(y)\psi(\xi)e^{ix\xi}dy\ d\xi \overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y-x)\xi}\psi(\xi)\ d\xi\ dy$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \cdot \widetilde{\psi}(y-x)\ dy$$

Setzt man nun für irgendein $\varepsilon > 0$:

$$\psi(\xi) := e^{-\frac{\varepsilon^2\|\xi\|^2}{2}} \rightsquigarrow \widetilde{\psi}(y) = \varepsilon^{-n} \exp\left[-\frac{\|y\|^2}{2\varepsilon^2}\right]$$

dann ist nach (3.5.4.1):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\varphi}(\xi)e^{ix\xi} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2\|\xi\|^2}{2}\right]\ d\xi = \varepsilon^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \exp\left[-\frac{\|x-y\|^2}{2\varepsilon^2}\right]\ dy$$

$$\overset{z:=\frac{x-y}{\varepsilon}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-\varepsilon z)e^{-\frac{\|z\|^2}{2}}dz \quad \forall\ \varepsilon > 0 \tag{$\clubsuit$}$$

Dabei gehen

$$\widetilde{\varphi}(\xi) \exp\left[-\frac{\varepsilon^2\|\xi\|^2}{2}\right] e^{ix\xi} \underset{\text{punktweise}}{\overset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow}} \widetilde{\varphi}(\xi)e^{ix\xi}$$

$$\varphi(x-\varepsilon z)e^{-\frac{\|z\|^2}{2}} \underset{\text{punktweise}}{\overset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow}} \varphi(x)e^{-\frac{\|z\|^2}{2}}$$

und die Majoranten

$$|\widetilde{\varphi}(\xi)| \geq \left|\widetilde{\varphi}(\xi) \exp\left[-\frac{\varepsilon^2 \|\xi\|^2}{2}\right] e^{ix\xi}\right|$$

$$\|\varphi\|_\infty e^{-\frac{\|z\|^2}{2}} \geq \left|\varphi(x-\varepsilon z) e^{-\frac{\|z\|^2}{2}}\right|$$

sind beide integrierbar. Nach Lebesgue (Satz der majorisierten Konvergenz) geht dann (♣) mit $\varepsilon \searrow 0$ über in die Form

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\varphi}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-\frac{\|z\|^2}{2}} dz = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \varphi(x)$$

□

3.5.5 Satz: Isometrie der Fouriertransformation (Plancherell)

Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ ist eine Isometrie.

Beweis: Für $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt stets

$$\mathcal{F}(\psi^*)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \varphi(x)\, dx\right]^* = \mathcal{F}^*(\psi)(-\xi)$$

Außerdem ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\varphi}(\xi) \psi(\xi) e^{ix\xi} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \widetilde{\psi}(y-x)\, dy \qquad (♣)$$

(vgl. (3.5.4.1)) und speziell für $x = 0$:

$$\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi)(\xi) \cdot \mathcal{F}^*(\psi)(\xi)\, d\xi}_{\langle \mathcal{F}(\varphi), \mathcal{F}(\psi)\rangle_{L_2}} \overset{(♣)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \cdot \underbrace{\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^*(\psi)\right](y)}_{\mathcal{F}^*[\mathcal{F}(\psi)](-y)}\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \cdot \Big[\underbrace{\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}(\psi)\right]}_{\psi}(y)\Big]^*\, dy = \langle \varphi, \psi \rangle_{L_2}$$

das heißt $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ist eine Isometrie bzgl. der L_2-Norm, also auch stetig bzgl. dieser! Nach 1.3.4 ist $S(\mathbb{R}^n)$ dicht im Hilbertraum L_2. Nach Fortsetzungssatz A.0.10 kann $\mathcal{F}$ auf $L_2(\mathbb{R}^n)$ stetig, unitär, eindeutig fortgesetzt werden.
□

Bemerkung: Klassisch ist die Fouriertransformierte von L_2-Funktionen nicht definiert. $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ ist lediglich eine stetige Fortsetzung von $S(\mathbb{R}^n)$ auf L_2. Im Falle $f \in S(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$, ist diese jedoch konsistent mit der klassischen Definition von $\mathcal{F}(f)$. [10]

3.5.6 Faltungssatz

Für $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{F}(\varphi * \psi) &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \mathcal{F}(\varphi) \cdot \mathcal{F}(\psi) \\ \mathcal{F}(\varphi) * \mathcal{F}(\psi) &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \mathcal{F}(\varphi \cdot \psi) \end{aligned}}$$

[10] Für $(f_n) \subset S(\mathbb{R}^n),\ f \in S(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $f_n \overset{n\to\infty}{\underset{L_2}{\longrightarrow}} f$ gehen auch $\mathcal{F}(f_n) \overset{n\to\infty}{\underset{L_2}{\longrightarrow}} \underbrace{\mathcal{F}(f)}_{\substack{\text{klassische} \\ \text{Definition}}}$.

Beweis:

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}}\widetilde{\varphi}(\xi)\widetilde{\psi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi}\varphi(y)\ dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\psi(x)\ dx \overset{x=z-y}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi}\varphi(y) \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(z-y)\xi}\psi(z-y)\ dz\ dy$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\xi} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(z-y)dy\ dz = \mathcal{F}(\varphi * \psi)(\xi)$$

□

3.6 Fouriertransformation für Distributionen

3.6.1 Definition: Fouriertransformation

Zu Distribution $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ definiert man die *Fouriertransformierte* $\mathcal{F}(u)$ gemäß:

$$\langle \mathcal{F}(u), \varphi\rangle := \langle u, \mathcal{F}(\varphi)\rangle \quad , \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Bemerkungen:

(i) $\mathcal{F}(u) : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ ist tatsächlich eine Distribution in $S'(\mathbb{R}^n)$.
Beweis: Linearität ist klar, Stetigkeit folgt aus Stetigkeit von $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ ist linear, stetig (bzgl. der schwachen Konvergenz von Distributionen).
Beweis: Klar!

3.6.2 Satz: Bijektivität der Fouriertransformation

Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ ist bijektiv, mit Umkehrabbildung

$$v \mapsto \mathcal{F}^{-1}(v) \quad , \quad \left\langle \mathcal{F}^{-1}(v), \varphi\right\rangle := \left\langle v, \mathcal{F}^{-1}(\varphi)\right\rangle \quad , \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Beweis: Injektivität: Für $u, v \in S'(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v) \;\Leftrightarrow\; \underbrace{\langle \mathcal{F}(u), \varphi\rangle}_{\langle u,\mathcal{F}(\varphi)\rangle} = \underbrace{\langle \mathcal{F}(v), \varphi\rangle}_{\langle v,\mathcal{F}(\varphi)\rangle} \quad \forall\ \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

$$\overset{\substack{\mathcal{F}:S(\mathbb{R}^n)\to S(\mathbb{R}^n)\\ \text{surjektiv}}}{\Longrightarrow} \quad \langle u, \psi\rangle = \langle v, \psi\rangle \quad \forall\ \psi \in S(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow\ u = v$$

Surjektivität: Zu $v \in S'(\mathbb{R}^n)$ betrachten die Distribution

$$\langle u, \varphi\rangle := \left\langle v, \mathcal{F}^{-1}(\varphi)\right\rangle \quad , \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Dann gilt

$$\langle \mathcal{F}(u), \varphi\rangle \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\langle u, \mathcal{F}(\varphi)\rangle}_{\langle v,\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi))\rangle} = \langle v, \varphi\rangle \quad , \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

das heißt $\mathcal{F}(u) = v$.
□

3.6.3 Satz: Konsistenz der Fouriertransformation für reguläre Distributionen

Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ ist eine natürliche Erweiterung: Für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ bzw. $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ ist

$$u_{\mathcal{F}(f)} = \mathcal{F}(u_f)$$

Beachte dass tatsächlich $u_f, u_{\mathcal{F}(f)} \in S'(\mathbb{R}^n)$ sind (vgl. Bemerkung 2.1.8 und Abschätzung (3.5.1.1)).

Beweis: Sei zunächst $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Für $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\langle \mathcal{F}(u_f), \varphi \rangle \overset{\text{def}}{=} \langle u_f, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widetilde{\varphi}(x)\, dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \varphi(\xi)\, d\xi\, dx$$

$$\overset{\substack{\text{Fubini} \\ f,\varphi \in L_1}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi = \left\langle u_{\mathcal{F}(f)}, \varphi \right\rangle$$

Sei nun $f \in L_2$, dann existieren $(f_n) \subseteq S(\mathbb{R}^n)$ mit $f_n \overset{n\to\infty}{\underset{L_2}{\longrightarrow}} f$ bzw. $\mathcal{F}(f_n) \overset{n\to\infty}{\underset{L_2}{\longrightarrow}} \mathcal{F}(f)$. Nach (2.1.8.1) also

$$u_{\mathcal{F}(f_n)} \overset{n\to\infty}{\underset{\text{schwach*}}{\longrightarrow}} u_{\mathcal{F}(f)}$$

Aus dem gleichen Grund gehen auch $u_{f_n} \overset{n\to\infty}{\underset{\text{schwach*}}{\longrightarrow}} u_f$ das heißt nach Bemerkung 3.6.1(ii):

$$\mathcal{F}(u_{f_n}) \overset{n\to\infty}{\underset{\text{schwach*}}{\longrightarrow}} \mathcal{F}(u_f)$$

Da $\mathcal{F}(u_{f_n}) \overset{f_n \in L_1}{=} u_{\mathcal{F}(f_n)}$ ist wegen der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes

$$u_{\mathcal{F}(f)} = \mathcal{F}(u_f)$$

□

3.6.4 Rechenregeln für Fouriertransformation von Distributionen

Für Distribution $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ gilt

1. $\partial^\alpha \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}\left((-ix)^\alpha u\right)$ für Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.
2. $(ix)^\alpha \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}\left(\partial^\alpha \varphi\right)$.

Beweis: Analog zu 3.5.3.

3.6.5 Beispiel: Fouriertransformation der δ-Distribution

Betrachtet sei die Dirac-Distribution $\delta_0 \in S'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\langle \mathcal{F}(\delta_0), \varphi \rangle \overset{\text{def.}}{=} \langle \delta_0, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \widetilde{\varphi}(0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix0} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \varphi(x)\, dx = \left\langle u_{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}, \varphi \right\rangle$$

das heißt

$$\boxed{\mathcal{F}(\delta_0) = u_{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}} \tag{3.6.5.1}$$

Beachte: Als Fouriertransformierte von $\delta_0 \in S'(\mathbb{R}^n)$ ist $\widetilde{\delta_0} \in S'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$. Doch obwohl $\delta_0 \in \mathscr{C}'(\mathbb{R}^n)$, ist $\widetilde{\delta_0} \notin \mathscr{C}'(\mathbb{R}^n)$.

Interpretation: Mit $\mathcal{F}^{-1}\left(u_{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}\right) = \delta_0$ erhält man *formal* $\mathcal{F}^{-1}\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}}\right) = \delta_0$. Hinsichtlich dieses *Zusammenhangs*, wird oft geschrieben

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi}\varphi(y)\;dy\;d\xi \overset{\text{formale Umrechnung}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-z)\underbrace{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{iz\xi}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\;d\xi}_{\mathcal{F}^{-1}\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}}\right)(z)}\;dz \quad \Big| \quad z := x-y$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-z)\delta_{z=0}\;dz \overset{\text{formale def.}}{=} \langle \delta_0, \varphi(x-\cdot)\rangle = \varphi(x-0) = \varphi(x) \quad \Big| \quad \text{(vgl. 3.3.2)}$$

Spezialfall: Hatten gesehen dass

$$\widetilde{1}_{[-N,N]}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(N\xi)}{\xi} \quad , \quad N \in \mathbb{N}$$

(vgl. (3.5.2.1)) wobei $u_{\widetilde{1}_{[-N,N]}} \in S'(\mathbb{R})$ ist. Nach Beispiel 2.2.1(2) gehen einerseits

$$u_{\widetilde{1}_{[-N,N]}} \underset{\text{schwach*}}{\overset{N\to\infty}{\longrightarrow}} \sqrt{2\pi}\cdot\delta_0$$

Anderseits: Wegen

$$u_{1_{[-N,N]}} \underset{\text{schwach*}}{\overset{N\to\infty}{\longrightarrow}} u_1 \qquad (\text{in } S'(\mathbb{R}^n))$$

(vgl. Lemma 2.1.10) geht aufgrund der Stetigkeit von $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ auch

$$\underbrace{\mathcal{F}\left(u_{1_{[-N,N]}}\right)}_{\substack{u_{\widetilde{1}_{[-N,N]}} \\ (3.6.3)}} \underset{\text{schwach*}}{\overset{N\to\infty}{\longrightarrow}} \mathcal{F}(u_1)$$

Aufgrund der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes also

$$\mathcal{F}(\sqrt{2\pi}\cdot\delta_0) = \mathcal{F}(u_1)$$

was genau dem Ergebnis (3.6.5.1) entspricht!

3.6.6 Lemma über Distributionen mit Punktträger

Sei $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(u) = \{0\}$. Dann ist $\widetilde{u}$ eine reguläre Distribution, erzeugt durch ein Polynom endlicher Ordnung.

Beweis: Nach Satz 3.3.3 existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und Konstanten $a_\alpha \in \mathbb{C}$ mit

$$u = \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha \cdot \partial^\alpha \delta_0$$

Daher kann man für $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ schreiben:

$$\langle \widetilde{u}, \varphi\rangle \overset{\text{def.}}{=} \langle u, \widetilde{\varphi}\rangle \overset{(3.3.3)}{=} \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha \langle \partial^\alpha\delta_0, \widetilde{\varphi}\rangle \overset{\text{def.}}{=} \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha (-1)^\alpha \langle \delta_0, \partial^\alpha \widetilde{\varphi}\rangle$$

$$\overset{(3.5.3)}{=} \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_0, \mathcal{F}\left((-ix)^\alpha \varphi(\cdot)\right)\rangle = \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha \mathcal{F}\left((ix)^\alpha\varphi(x)\right)(0)$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (ix)^\alpha \varphi(x)\;dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha (ix)^\alpha}_{=:P(x)} \cdot\varphi(x)\;dx = \langle u_P, \varphi\rangle$$

□

3.6.7 Laplace-Transformation von Funktionen

Zu $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ definiert man die *Laplace-Transformierte* $\mathcal{L}(\varphi) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ gemäß

$$\mathcal{L}(\varphi)(z) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ixz}\varphi(x)\, dx \quad , \quad z \in \mathbb{C}^n$$

3.6.8 Definition: Laplace-Transformation von Distributionen

Zu Distribution $u \in \mathscr{C}'(\mathbb{R}^n)$ definiert man die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(u) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ gemäß

$$\mathcal{L}(u)(z) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \langle u, \exp[-iz(\cdot)]\rangle$$

3.6.9 Satz von Paley-Wiener

Sei $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Dann existiert ein $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (mit $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq B_R(0)$) so dass $f = \mathcal{L}(\varphi)$ genau dann wenn f ganz-analytisch ist und zu jedem $N \in \mathbb{N}_0$ ein $C_N \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$|f(z)| \leq C_N \left(1 + \|z\|^2\right)^{-\frac{N}{2}} e^{R|\Im(z)|} \quad \forall\ z \in \mathbb{C}^n$$

Beweis: Richtung "⇒". Ähnlich zur Fourier-Transformation (3.5.3), lässt sich leicht zeigen:

$$(iz)^\alpha \mathcal{L}(\varphi)(z) = \mathcal{L}\left(\partial^\alpha\varphi\right)(z) \quad , \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Somit

$$|z^\alpha| \cdot |\mathcal{L}(\varphi)(z)| \overset{\mathrm{supp}(\varphi)\subseteq B_R(0)}{\leq} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{B_R(0)} \left|e^{-ixz}\right| \cdot |(\partial^\alpha\varphi)(x)|\ dx$$

$$\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sup_{\|x\|\leq R} |\partial^\alpha\varphi(x)| \cdot \int\limits_{\|x\|\leq R} \underbrace{|\exp[-i\Re(z)x]|}_{1} \cdot |\exp[\Im(z)x]|\ dx$$

$$\leq \underbrace{C_{\alpha,R}}_{\text{const}} \cdot \exp[\|\Im(z)\| \cdot R] \quad \forall\ |\alpha| \leq N,\ z \in \mathbb{C}^n$$

$$\Rightarrow \left(1 + \|z\|^2\right)^{\frac{N}{2}} |\mathcal{L}(\varphi)(z)| \leq \underbrace{\widetilde{C}_{R,N}}_{\text{const}} \cdot \exp[\|\Im(z)\| \cdot R] \quad \forall\ z \in \mathbb{C}^n$$

Ganz-Analyzität folgt aus

$$\partial^\alpha \mathcal{L}(\varphi) = \underbrace{\mathcal{L}\left(x \mapsto (-ix)^\alpha\varphi(x)\right)}_{\substack{\text{existiert stets} \\ \text{da supp}(\varphi) \\ \text{kompakt}}}$$

Richtung "⇐". Sei nun f ganz-analytisch mit der Abschätzung

$$|f(z)| \leq \underbrace{C_N}_{\text{const}} \left(1 + \|z\|^2\right)^{-\frac{N}{2}} e^{R|\Im(z)|} \quad \forall\ z \in \mathbb{C}^n,\ N \in \mathbb{N}_0 \qquad (\spadesuit)$$

Dann erfüllt

$$\varphi(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi)\ d\xi \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

zunächst die Bedingung $\mathcal{L}\varphi = f$. Tatsächlich ist sogar $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$, denn

$$\partial_x^\alpha \varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} (i\xi)^\alpha f(\xi)\ d\xi}_{\substack{\in\mathbb{R} \\ \text{wegen } (\spadesuit)}}$$

Zu zeigen bleibt: $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq B_R(0)$. Dazu sei o.B.d.A. $n = 1$. Zu $\eta, r > 0$ sei betrachtet der Weg $\gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$ (siehe Abbildung 4).

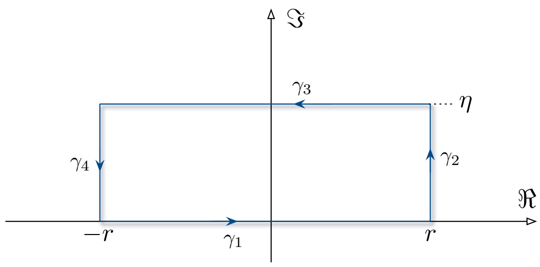

Abbildung 4: Zum Beweis des Satzes von Paley-Wiener. Nach Cauchy ist das Integral über den gesamten geschlossenen Weg gleich 0.

Dann gilt für γ_2 (und analog auch γ_3) die Abschätzung

$$\Big| \int\limits_{\gamma_2} e^{ix\zeta} f(\zeta)\ d\zeta \Big| \le \int\limits_{\gamma_2} \underbrace{\left| e^{ix(r+it)} i f(r+it) \right|}_{e^{-tx}|f(r+it)|}\ dt \overset{(\spadesuit)}{\le} \int\limits_0^\eta e^{t(R-x)} C_N \left(1 + |r|^2\right)^{-\frac{N}{2}}\ dt$$

$$\le C_{N,\eta,x,R}\, |r|^{-N} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Daher folgt nach Cauchyschem Integralsatz:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} f(\xi)\ d\xi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi + i\eta) e^{ix(\xi+i\eta)} d\xi$$

$$\Rightarrow\ |\varphi(x)| \overset{(\spadesuit)}{\le} C_N \int\limits_{\mathbb{R}} \left(1 + |\xi + i\eta|^2\right)^{-\frac{N}{2}} \underbrace{\left|e^{ix\xi}\right|}_{1} e^{-x\eta} e^{R|\eta|} d\xi \le \underbrace{\widetilde{C}_N}_{\text{const}} e^{R|\eta| - x\eta} \quad , \quad N \in \mathbb{N}_0,\ \eta > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Wählen nun $\eta := \alpha \cdot x$ für irgendein $\alpha > 0$, dann

$$|\varphi(x)| \le \widetilde{C}_N e^{R\alpha|x| - \alpha|x|^2} \underset{(|x|>R)}{\overset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow}} 0$$

das heißt $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq B_R(0)$.
□

Folgerung: Die Laplace-Transformierte einer $\mathcal{C}^\infty$-Funktion φ mit kompakten Träger kann nur im Trivialfall $\varphi \equiv 0$ einen kompakten Träger besitzen[11].

[11] Sind f, g analytisch auf dem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ und $f(z_n) = g(z_n)$ für eine Folge $(z_n) \subset \Omega$, $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z \in \Omega$, $z_n \neq z$, so sind $f = g$ auf ganz Ω.

3.6.10 Satz von Paley-Wiener-Schwartz

Sei $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Dann existiert ein $u \in \mathscr{C}'(\mathbb{R}^n)$ (mit $\operatorname{supp}(u) \subseteq B_R(0)$) so dass $f(z) = \mathcal{L}(u)(z)$ genau dann wenn f ganz-analytisch ist und

$$|f(z)| \leq C \cdot \left(1 + \|z\|^2\right)^{\frac{N}{2}} e^{R|\Im(z)|} \quad \forall\ z \in \mathbb{C}^n$$

für geeignete $N \in \mathbb{N},\ C \in \mathbb{R}$. (Ohne Beweis)

4 Verallgemeinerte Differentialgleichungen

4.0.11 Definition: Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten

Zu Konstanten $a_\alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ heißt der Operator

$$P(\partial) := \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \cdot \partial^\alpha \tag{4.0.11.1}$$

Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten.

Bemerkung: Formal kann $P \in \mathbb{C}^n[X]$ als Polynom N-ten Grades auf $\mathbb{C}^n$ mit dem Differentialoperator ∂ als Argument aufgefasst werden.

4.0.12 Verallgemeinerte Differentialgleichungen

Gegeben sei die Distribution $\rho \in S'(\mathbb{R}^n)$ und der Differentialoperator

$$P(\partial) := \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \cdot \partial^\alpha$$

Gesucht ist nun eine Distribution $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ die die *Differentialgleichung*

$$P(\partial)u = \rho$$

erfüllt. Äquivalent dazu ist

$$\mathcal{F}\left(P(\partial)u\right) = \mathcal{F}(\rho)$$

Dabei existiert nach Rechenregeln 3.6.4 ein, nur von P abhängiges, Polynom $\mathcal{S}_P \in \mathbb{C}^n[X]$ mit $\mathcal{F}(P(\partial)u) = \mathcal{S}_P\mathcal{F}(u)$, das heißt die Differentialgleichung nimmt die Form

$$\mathcal{S}_P \cdot \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(\rho)$$

an. Man nennt das für den Differentialoperator charakteristische Polynom $\mathcal{S}_P$ *Symbol* von $P(\partial)$. Formal erhält man also die Lösung durch

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathcal{F}(\rho)}{\mathcal{S}_P}\right]$$

(falls Sinnvoll).

Beispiel: Der Laplace-Operator

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{x^j x^j}$$

besitzt das Symbol

$$\mathcal{S}_\Delta(\xi) = -\left\|\xi\right\|^2$$

Tabelle (1) zeigt weitere Symbole wichtiger Differentialoperatoren.

Operator	Symbol
$\mathrm{Id} - \Delta$	$\mathcal{S}(\xi) = 1 + \left\|\xi\right\|^2$
$\partial_t - \Delta$	$\mathcal{S}(\tau, \xi) = i\tau + \left\|\xi\right\|^2$
$\partial_t^2 - \Delta$	$\mathcal{S}(\tau, \xi) = -\tau^2 + \left\|\xi\right\|^2$

Tabelle 1: Symbole wichtiger Differentialoperatoren.

4.0.13 Eigenschaften verallgemeinerter Differentialgleichungen

Sei $P[\partial]$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten und Symbol $\mathcal{S}_P$.

1. Ist $|\mathcal{S}_P| \geq C > 0$ für irgendeine Konstante $C \in \mathbb{R}$ so besitzt die Differentialgleichung $P(\partial)u \overset{!}{=} u_\rho$ für jedes $\rho \in L_2$ eine eindeutig bestimmte Lösung in L_2.[12]

2. Ist sogar
$$|\mathcal{S}_P(\xi)| \geq C \cdot \left(1 + \|\xi\|^2\right)^{\frac{m}{2}} > 0 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{C}$$
für irgendwelche Konstanten $C > 0,\ m \in \mathbb{N}$, so ist die Lösung sogar aus $W_2^m(\mathbb{R}^n)$.

Beweis:

1. Nach Voraussetzung ist die Differentialgleichung $P(\partial)u \overset{!}{=} u_\rho$ äquivalent zu
$$u = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathcal{F}(u_\rho)}{\mathcal{S}_P}\right] \overset{\substack{\rho \in L_2\\(3.6.3)}}{=} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{u_{\mathcal{F}(\rho)}}{\mathcal{S}_P}\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[u_{\mathcal{F}(\rho)/\mathcal{S}_P}\right]$$
Dabei ist $\frac{\mathcal{F}(\rho)}{\mathcal{S}_P} \in L_2$, denn
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\mathcal{F}(\rho)(\xi)|^2}{|\mathcal{S}_P(\xi)|^2}\, d\xi \leq \frac{1}{C^2} \int\limits_{R^n} |\underbrace{\mathcal{F}(\rho)}_{\in L_2}(\xi)|^2\, d\xi < \infty$$
das heißt $u = u_f$ ist für
$$f := \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathcal{F}(\rho)}{\mathcal{S}_P}\right]}_{\in L_2}$$
eine Lösung.
Eindeutigkeit: Es genügt zu zeigen: Aus $P(\partial)v \overset{!}{=} 0$ folgt $v = 0$. Tatsächlich folgt aus
$$\mathcal{S}_P \cdot \mathcal{F}(v) = 0$$
dass $\mathcal{F}(v) = 0$ ist (vgl. 3.1.2 Bemerkung (iii)), also $v = 0$.

2. Nach Voraussetzung gilt sogar
$$\frac{\mathcal{F}(\rho)}{\mathcal{S}_P} \in \underbrace{L_{2,\left(1+|x|^2\right)^m}(\mathbb{R}^n)}_{\subseteq L_2(\mathbb{R}^n)}$$
Dabei gilt stets:
$$\mathcal{F} : L_{2,\left(1+|x|^2\right)^m}(\mathbb{R}^n) \to W_2^m(\mathbb{R}^n)$$
(ohne Beweis).

□

Beispiel: Betrachtet sei die verallgemeinerte DGL
$$\Delta E \overset{!}{=} \delta_0 \quad , \quad \delta \in S'(\mathbb{R}^3)$$
Diese ist äquivalent zu
$$\overbrace{-\|x\|^2}^{\mathcal{S}_\Delta(x)} \cdot \mathcal{F}(E) \overset{!}{=} \mathcal{F}(\delta_0) \overset{(3.6.5.1)}{=} u_{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}$$
Machen den Ansatz $\mathcal{F}(E) = u_{\mathcal{F}(\mathcal{E})}$ mit $\mathcal{E} \in L_{1,\mathrm{loc}}$ und erhalten formal:
$$\mathcal{E} = \mathcal{F}^{-1}\left\{-\left[(2\pi)^{\frac{3}{2}}\|x\|^2\right]^{-1}\right\}$$

[12] Die Aussage ist wie folgt zu interpretieren: Ist $\rho \in L_2$, so wird die verallgemeinerte DGL $P(\partial)u \overset{!}{=} u_\rho$ gelöst durch $u := u_f$ für irgendein $f \in L_2$.

Wir berechnen:

$$\mathcal{E}(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}(-1)\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ix\xi}}{\|\xi\|^2}\, d\xi = -(2\pi)^{-3}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\|\xi\|\leq R} \frac{e^{ix\xi}}{\|\xi\|^2}\, d\xi$$

$$= (2\pi)^{-3}\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} e^{i\|x\|\rho\cos\vartheta}\frac{\rho^2}{\rho^2}\sin\vartheta\; d\varphi\; d\vartheta\; d\rho \quad \Big| \quad \text{Kugelkoordinaten mit } x \text{ als } \xi_z\text{-Achse}$$

$$= (2\pi)^{-2}\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R\int\limits_{-1}^1 e^{i\|x\|\rho t}dt\; d\rho \quad \Big| \quad t := \cos\vartheta$$

$$= (2\pi)^{-2}\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R \frac{1}{\|x\|\,\rho}\underbrace{\left[e^{i\|x\|\rho} - e^{-i\|x\|\rho}\right]}_{2i\sin\vartheta}\; d\rho = -\frac{2}{4\pi^2}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\|x\|}\underbrace{\int\limits_0^R \frac{\sin(\|x\|\,\rho)}{\rho}\; d\rho}_{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{-2}{4\pi^2}\cdot\frac{\pi}{2\,\|x\|}$$

(vgl. umgekehrtes Ergebnis in (3.2.5.1)). Bemerke dass nach 2.1.9 tatsächlich $u_{\mathcal{E}} \in S'(\mathbb{R}^3)$ ist.

5 Faltung und Tensorprodukt

5.1 Faltung zwischen Distributionen & Funktionen

5.1.1 Definition: Faltung von Distributionen

Sei $X := \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $X := S(\mathbb{R}^n)$. Zu $u \in X',\ \varphi \in X$ definiert man die *Faltung*

$$(u * \varphi)(x) := \langle u, \varphi(x - \cdot)\rangle$$

Beachte: Wegen $\varphi(x - \cdot) \in X$ ist die Definition tatsächlich sinnvoll.

Eigenschaften:

(i) Es gilt $(u * \varphi) \in \mathcal{C}^\infty$. Dabei ist für Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$:

$$\partial^\alpha (u * \varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi = u * (\partial^\alpha \varphi)$$

(ii) Zu $\varphi \in X$ gilt stets $(\delta_0 * \varphi) = \varphi$.

(iii) Es gilt

$$\operatorname{supp}(u * \varphi) \subseteq \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(\varphi)$$

5.1.2 Faltung und Differentialgleichungen

Betrachtet sei die DGL

$$P(\partial)f \overset{!}{=} \rho \quad , \quad \rho \in S(\mathbb{R}^n),\ P \in \mathbb{C}^n[X]$$

wobei gegeben sei die sogenannte *Fundamentallösung* $K \in S'(\mathbb{R}^n)$ der verallgemeinerten DGL:

$$P(\partial)K = \delta_0$$

Dann ist $f := K * \rho$ eine Lösung der DGL, denn

$$P(\partial)f = P(\partial)(K * \rho) = \underbrace{(P(\partial)K)}_{\delta} * \rho = \rho$$

5.2 Faltung von Distributionen untereinander

5.2.1 Vorbetrachtung

Gegeben seien die Funktionen $f, g \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ so dass auch die Faltung $f*g$ lokal integrierbar ist. Zu $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt dann

$$\langle u_{f*g}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)\varphi(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(y) f(x-y) dy\ \varphi(x)\ dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(y) f(x-y)\varphi(x)\ dx\ dy \quad \Big| \quad \text{Annahme: Fubini anwendbar}$$

$$\overset{z:=x-y}{=} \int\int g(y) f(z) \varphi(y+z)\ dz\ dy = \int\int \underbrace{f(x)g(y)}_{(f\otimes g)(x,y)} \cdot \varphi(x+y)\ dx\ dy$$

Ersichtlich wird: Die allgemeinere Faltung zwischen Distributionen erfordert ein *direkten Produktes*

$$\otimes : \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^{2n})$$

Ein weiteres Problem ist die Tatsache dass $\operatorname{supp}((x,y) \mapsto \varphi(x+y))$ in $\mathbb{R}^{2n}$ im allgemeinen nicht kompakt ist!

5.2.2 Definition: Direktes Produkt zwischen Funktionen

Zu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ ist das *direkte Produkt* $f \otimes g : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$(f \otimes g)(x, y) := f(x) \cdot g(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m$$

Bemerkungen:

(i) Sind $f, g \in \mathcal{C}^\infty$, so ist auch $f \otimes g \in \mathcal{C}^\infty$.

(ii) Es ist $\operatorname{supp}(f \otimes g) \subseteq \operatorname{supp}(f) \times \operatorname{supp}(g)$.

(iii) Die Menge aller endlichen Linearkombinationen

$$\left\{ \sum_{j=1}^{N} \varphi_j \otimes \psi_j : \varphi_i \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n),\ \psi_j \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^m),\ N \in \mathbb{N}_0 \right\} \subseteq \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+m})$$

liegt dicht in $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+m})$.[2]

5.2.3 Bemerkung zur teilweise Wirkung von Distributionen

Betrachtet seien die Distribution $v_y \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^m)$ und die Funktion $\rho \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+m}),\ \rho : (x, y) \mapsto \rho(x, y)$. Definieren dazu die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(x) := \langle v_y, \rho(x, \cdot) \rangle \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Dann kann gezeigt werden[2]:

1. Es gilt stets $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\partial^\alpha \varphi(x) = \langle v_y, \partial_x^\alpha \rho(x, \cdot) \rangle \quad , \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ x \in \mathbb{R}^n$$

2. Mit $\Pi_{\mathbb{R}^n}$ als den Projektor auf $\mathbb{R}^n$, $\Pi_{\mathbb{R}^n}(x, y) := x$, gilt

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \Pi_{\mathbb{R}^n}(\operatorname{supp}(\rho))$$

3. Gehen $\rho_k \underset{\mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+m})}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} \rho$, dann gehen auch $\varphi_k \underset{\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} \varphi$, das heißt die Vorschrift $\langle v_y, \cdot \rangle : \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+m}) \to \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.

5.2.4 Definition: Direktes Produkt zweier Distributionen

Seien $u \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $v \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^m)$ zwei Distributionen. Dann existiert genau eine Distribution $u \otimes v \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ (Definition!) mit

$$\langle u \otimes v, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle u, \varphi \rangle \cdot \langle v, \psi \rangle \quad \forall\ \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n),\ \psi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^m)$$

bzw.

$$\langle u \otimes v, \rho \rangle = \langle u, \langle v, \rho(x, \cdot) \rangle \rangle = \langle v, \langle u, \rho(\cdot, y) \rangle \rangle \quad \forall\ \rho \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+m})$$

Man nennt $u \otimes v$ *direktes Produkt* zwischen u und v.

Bemerke:

(i) Eindeutigkeit folgt aus Bemerkung 5.2.2(iii).

(ii) Das direkte Produkt $\otimes : \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^m) \to \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ ist assoziativ.

(iii) Ableitungen ∂_x^α und ∂_y^β wirken jeweils separat auf die entsprechenden Komponenten, z.B.

$$\partial_x^\alpha (u \otimes v) = (\partial^\alpha u) \otimes v$$

Ähnliches gilt auch bei Multiplikation mit $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen und Koordinatentransformationen.

Beispiele:

(a) Zu $u \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ und die von 1 erzeugte Distribution $v_1 \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^m)$ gilt:

$$\langle u \otimes v_1, \rho \rangle = \langle u, \langle v_1, \rho \rangle \rangle = \left\langle u, \int\limits_{\mathbb{R}^m} \rho(x,y)\ dy \right\rangle \quad , \quad \rho \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+m})$$

Ist ferner $u = u_f$ erzeugt durch $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ so ist

$$\langle u_f \otimes v_1, \rho \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x)\rho(x,y)\ dy\ dx$$

(b) Sei $u \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $\delta_0 \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^m)$ die Dirac-Distribution. Dann:

$$\langle u \otimes \delta_0, \rho \rangle = \langle u, \langle \delta_0, \rho(x,\cdot) \rangle \rangle = \langle u, \rho(x,0) \rangle \quad , \quad \rho \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+m})$$

Ist ferner $u = u_f$ erzeugt durch $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ so lässt sich schreiben:

$$\langle u_f \otimes \delta_0, \rho \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\rho(x,0)\ dx$$

Betrachtet man $S := \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ als Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+m}$ mit $f : S \to \mathbb{C}$, so ist

$$u_f \otimes \delta_0 = \delta_S$$

(vgl. 2.1.12(i)).

(c) Direkte Produkte von Distributionen spielen eine wichtige Rolle in der Formulierung von *Anfangswertproblemen* bei verallgemeinerten Differentialgleichungen. Als Beispiel sei betrachtet die klassische Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = f(x,t) \quad , \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

als Anfangswertproblem

$$U(x,0) = U_0(x) \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = U_1(x)$$

In der Sprache der Distributionen erhält diese folgende Form:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = F + U_1 \otimes \delta_{t=0} U_0 \otimes \delta'_{t=0}$$

bei gegebener Distribution F mit $\mathrm{supp}(F) \subset \mathbb{R} \times [0,\infty)$. Gesucht ist dabei Distribution U mit $\mathrm{supp}(U) \subseteq \mathbb{R} \times [0,\infty)$.

5.2.5 Lemma über den Träger von direkten Produkten

Seien $u, v \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$\mathrm{supp}\left[((x,y) \mapsto \varphi(x+y)) \cdot (u \otimes v)\right] \subseteq \{(x,y) : x \in \mathrm{supp}(u),\ y \in \mathrm{supp}(v),\ x+y \in \mathrm{supp}(\varphi)\}$$

5.2.6 Hilfsdefinition zur Faltung

Sei $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, so dass $\eta\big|_{B_1(0)} = 1$ und $\eta(x,y) = \eta(y,x)$, dazu

$$\eta_k(x,y) := \eta\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) \quad , \quad x, y \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}$$

Dann ist insbesondere $\eta_k\big|_{B_k(0)} = 1$.

5.2.7 Definition: Faltung zweier Distributionen

Seien $u, v \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ so dass für jedes $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ die Menge

$$\Omega_\varphi := \{(x,y) : x \in \operatorname{supp}(u),\ y \in \operatorname{supp}(v),\ x+y \in \operatorname{supp}(\varphi)\} \tag{♣}$$

beschränkt ist (*Faltbarkeitsbedingung*). Dann existiert der Grenzwert

$$\langle (u*v), \varphi\rangle := \lim_{k\to\infty} \left\langle u \otimes v, \underbrace{((x,y) \mapsto \eta_k(x,y) \cdot \varphi(x+y))}_{\in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{2n})} \right\rangle$$

für alle $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ und gehört zu $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$. Die so definierte Distribution $u * v$ heißt *Faltung* von u und v.

Bemerkungen:

(i) Im Allgemeinen ist $\varphi_+ := ((x,y) \mapsto \varphi(x+y)) \notin \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{2n})$.

(ii) Da Ω_φ beschränkt ist, besitzt $\varphi_+ \cdot (u \otimes v) \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ einen kompakten Träger, kann also fortgesetzt werden auf ganz $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$. Daher ist im Prinzip

$$\langle u * v, \varphi\rangle = \langle \varphi_+ \cdot (u \otimes v),\ 1\rangle \tag{♠}$$

Alternativ: Aufgrund der Beschränktheit von Ω_φ, existiert stets ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\eta_k\big|_{\Omega_\varphi} = 1 \ \ \forall\, k \geq k_0$. Daher ist

$$\langle u * v, \varphi\rangle \overset{(3.1.4)}{=} \underbrace{\langle u \otimes v, \eta_{k_0} \cdot \varphi_+\rangle}_{\langle \varphi_+ \cdot (u\otimes v),\ \eta_{k_0}\rangle}$$

was genau Darstellung (♠) entspricht.

(iii) Bedingung (♣) gilt z.B. in den Fällen:

- $u \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n),\ v \in \mathscr{C}'(\mathbb{R}^n)$ bzw. $u \in \mathscr{C}'(\mathbb{R}^n),\ v \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$
- $u, v \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(u), \operatorname{supp}(v) \subseteq \left\{x : x^j \geq 0,\ j = 1,..,n\right\}$

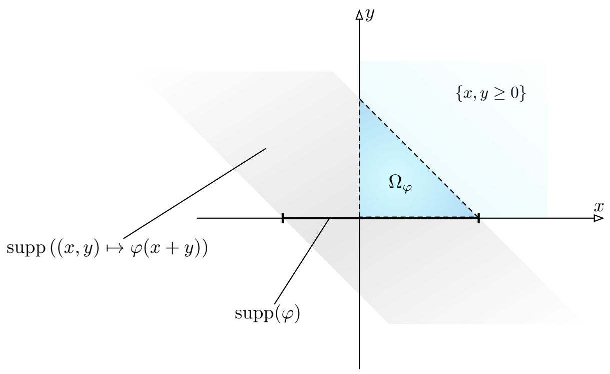

Abbildung 5: Hinreichende Bedingung zur Existenz der Faltung für $u, v \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$: Beide Träger liegen in der positiven Halbachse.

5.2.8 Eigenschaften der Faltung

Seien $u, v \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit der Faltbarkeitsbedingung in 5.2.7 erfüllt. Dann gilt:

1. $u * v = v * u$
2. $\partial^\alpha (u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v)$ für Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$
3. $u * \delta_0 = u$

5.2.9 Bemerkung zur Kompatibilität der Faltung

Sind $f, g \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$, dazu die erzeugten Distributionen $u_f, u_g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, so entspricht die Faltung $u_f * u_g$ genau der Faltung $f * g$, das heißt

$$u_{f*g} = u_f * u_g$$

Erläuterung: Für Testfunktion $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\begin{aligned}
\langle u_f * u_g, \varphi\rangle &\overset{\substack{k_0\\\text{groß}\\\text{genug}}}{=} \langle (u_f \otimes u_g), \eta_{k_0}\varphi_+\rangle = \langle u_f, \langle u_g, \eta_{k_0}(x,\cdot)\varphi(x+\cdot)\rangle\rangle \\
&= \int f(x) \int g(y)\varphi(x+y)\eta_{k_0}(x,y)\ dy\ dx = \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)\varphi(x+y)\ dx\ dy}_{\text{vgl. Ausdruck in 5.2.1}} \\
&= \langle u_{f*g}, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

A Anhang

A.0.10 Hilfssatz zur Fortsetzungen von Operatoren

Sei E ein Banachraum und $U \subseteq E$ dicht in E. Sei $T : U \to U$ ein stetiger, linearer Operator. Dann gilt:

1. T kann eindeutig zum einem stetigen, linearen Operator $T : E \to E$ fortgesetzt werden.
2. Ist $T : U \to U$ bijektiv, so ist es auch die Fortsetzung.
3. Ist $T : U \to U$ isometrisch, so ist es auch die Fortsetzung.

Beweis:

1. Zu vorgegebenem Element $x \in E$ existieren $u_1, u_2, .. \in U$ so dass $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Wegen
$$\|T(u_n) - T(u_m)\| = \|T(u_n - u_m)\| \le \|T\| \cdot \underbrace{\|u_n - u_m\|}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
ist $T(u_n)$ eine Cauchyfolge, die wegen der Vollständigkeit von E einen Grenzwert $y \in E$ besitzt. Setzen nun
$$T(x) := y = \lim_{n\to\infty} T(u_n)$$
Diese Zuordnung ist tatsächlich wohldefiniert und stetig, denn für $v_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ geht
$$\|T(v_n) - T(u_n)\| = \|T(v_n - u_n)\| \le \|T\| \cdot \underbrace{\|v_n - u_n\|}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
das heißt $\lim_{n\to\infty} T(v_n) = \lim_{n\to\infty} T(u_n) = T(x)$. Die Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt aus der Dichtheit von $U \subseteq E$ und der Stetigkeit von T. Linearität ist klar.
2. Zu vorgegebenem $y \in E$ existiert eine Folge $(u_n) \subseteq U$ mit $T(u_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Da auch T^{-1} beschränkt ist (da E Banach) ist $(u_n) = (T^{-1}(T(u_n))$ Cauchy und besitzt somit einen Grenzwert $x \in E$. Per Konstruktion der Fortsetzung ist dann
$$T(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} T(u_n) = y$$
3. Isometrie folgt aus Stetigkeit der Norm.

□

A.0.11 Definition: Sobolev-Raum

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$. Dann heißt der Raum aller Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, deren Ableitungen $\partial^\alpha f,\ |\alpha| \le k$ sowohl in $L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ als auch in $L_p(\Omega)$ liegen, *Sobolev Raum* $W_p^k(\Omega)$. Dabei ist $W_p^k(\Omega)$ ausgestattet mit der Norm
$$\|f\|_{W_p^k} := \sum_{|\alpha| \le k} \|\partial^\alpha f\|_{L_p(\Omega)} \quad , \quad f \in W_p^k$$
ein Banachraum. Für $p < \infty$ ist $W_p^k(\Omega)$ sogar separabel.

A.0.12 Definition: Gewichteter L_p-Raum

Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum und $g : \Omega \to [0, \infty)$ messbar. Dann definiert man den *gewichteten L_p-Raum*
$$L_{p,g}(\Omega, \mathfrak{S}, \mu) := L_p(\Omega, \mathfrak{S}, \nu) \quad , \quad \frac{d\nu}{d\mu} := g$$
als den Raum aller p-integrablen Funktionen bzgl. des Maßes $\nu \ll \mu$. Das heißt:
$$L_{p,g}(\Omega, \mathfrak{S}, \mu) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ messbar} \mid \underbrace{\int_\Omega |f|^p \cdot g \; d\mu}_{\|f\|^p_{L_{p,g}}} < \infty \right\} \Big/ \ker\left(\|\cdot\|_{L_{p,g}}\right)$$

Bemerke:

(i) Ist $g > 0$ μ-fast überall, so stimmen die Äquivalenzklassen in $L_{p,q}$ mit denen in L_p überein, sind andernfalls jedoch größer.

(ii) Ist $g \geq C > 0$ μ-fast überall für irgendeine Konstante C, so gilt $\|f\|_{L_p} \leq \text{const} \cdot \|f\|_{L_{p,g}}$, $f \in L_{p,g}$, das heißt insbesondere

$$L_{p,g} \hookrightarrow L_p$$

B Symbol-Referenz

$\mathbb{R}_+$ $:= [0,\infty) \subset \mathbb{R}$.

$\mathbb{Q}_+$ $:= \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}^*$ $:= R \cup \{\pm\infty\}$

$\mathbb{C}^*$ $:= \mathbb{R}^* + i\mathbb{R}^*$

z^*: Komplex-Konjugierte von $z \in \mathbb{C}$.

$\mathbb{K}^n[X]$: Für Körper $\mathbb{K}$, der Raum aller Polynome auf $\mathbb{K}^n$.

1_A: Indikatorfunktion für Menge A.

$\mathscr{P}(M)$: Potenzmenge von M.

$(T, \mathscr{O}(T))$: Topologischer Raum mit Topologie $\mathscr{O}(T)$.

$\mathscr{B}(T)$: Borel-σ-Algebra von T.

$(M, \mathcal{M}, \mu)$: Maßraum über Grundmenge M, mit σ-Algebra $\mathcal{M}$ und Maß μ.

(mod0): Bis auf Nullmengen, $f = g(\text{mod}0) \;:\Leftrightarrow\; \mu(\{f \neq g\}) = 0$.

X': Für linearen Raum X mit Konvergenzbegriff: Raum aller stetigen, linearen Funktionale auf X.

$L_p(M)$: Funktionenraum der p-integrierbaren, komplexwertigen Funktionen im Maßraum $(M, \mathcal{M}, \mu)$.

$L_{p,\text{loc}}(\Omega)$: Raum lokal-p-integrierbarer Funktionen auf Ω, siehe Def. 2.1.6.

$L_{p,\text{com}}(\Omega)$: Raum p-integrierbarer Funktionen mit kompaktem Träger auf Ω, siehe Def. 2.3.2.

$L_{p,g}(\Omega)$: Mit Gewichtsfunktion g gewichteter L_p Raum. Siehe A.0.12.

$W_p^k(\Omega)$: Sobolev-Raum über $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Siehe A.0.11.

$\overline{A}$: Für Untermenge $A \subset X$ eines topologischen Raumes X: Abschluss $\text{cl}(A) = \overline{A}$ von A.

$B_r(x)$: Abgeschlossene Kugel um x mit Radius r.

$B_r^o(x)$: Offene Kugel um x mit Radius r.

B_1^n: Abgeschlossene n-dimensionale Einheitskugel: $B_n^1 := B_1(0)$.

A_ε: Für Untermenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes X und $\varepsilon \geq 0$: $A_h := \bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x)$.

Ω^c: Komplement der Untermenge $\Omega \subset X$, $\Omega^c := X \setminus \Omega$.

$\overline{\Omega}$, $\text{cl}(\Omega)$: Abschluss von $\Omega \subset T$ im topologischen Raum T.

$\text{cl}_Y(\Omega)$: Abschluss von $\Omega \subset Y$ in Untermenge $Y \subset T$ des topologischen Raumes T, $\text{cl}_Y(\Omega) := \bigcap\limits_{\substack{A \text{ abgeschl. in } Y \\ \Omega \subset A}} A$.

$d(A, B)$: Für Untermengen $A, B \subset X$ eines metrischen Raumes: $d(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A,\; b \in B\}$.

$d(x, A)$: Für Untermenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes und $x \in X : d(x, A) := d(\{x\}, A)$.

S^n: n-dimensionaler Einheits-Kugelrand in $\mathbb{R}^{n+1}$: $S^n = \partial B_1^{n+1}$.

$S(R^n)$: Schwartz-Raum, siehe Def. 1.3.2.

$\|\cdot\|_{k,l}$: Siehe Def. 1.3.2.

$\langle x \rangle$: Siehe Notationen 1.3.1.

$D^\alpha \varphi$: Für reelle Funktion φ, siehe Notationen 1.3.1.

$D^\alpha u$: Für Distribution u, siehe Def. 3.2.2.

u_f: Reguläre Distribution erzeugt durch Funktion $f \in L_{1,\text{loc}}$ bzw. $f \in L_{1,\text{com}}$.

$\mathcal{F}$: Fouriertransformation.

$\operatorname{supp}(f) := \operatorname{cl}\{x \in X : f(x) \neq 0\}$: Träger von $f : X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{C}^p(\Omega)$: Raum aller komplexen, auf Ω p-mal stetig differenzierbaren Funktionen.

$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$: Raum aller komplexen, auf Ω glatten Funktionen.

$\mathscr{C}(\Omega)$ **::** $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ausgestattet mit Konvergenzbegriff (1.3.6).

$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \operatorname{supp}(f) \subset \Omega \ \wedge \ \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt}\}$.

$\mathfrak{D}(\Omega)$: $\mathcal{C}_0^\infty$ ausgestattet mit Konvergenzbegriff 1.3.7.

$\|\cdot\|_{\overline{\Omega},k}$: Siehe 1.3.6.

ω_h: Siehe 1.4.1.1.

$f * g$: Faltung von $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$: $(f * g)(x) := \int\limits_\Omega f(y)g(x-y)\, dy$.

δ_{x_0}: δ-Distribution auf $\mathfrak{D}(\Omega)$ (2.1.12).

$\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}$: Cauchyscher-Hauptwert (2.1.14).

e_j: Standard-Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$, $e_j = (0, .., 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1}, 0, .., 0)$.

Θ: Heavisidesche Sprungfunktion, siehe 3.2.4.1.

f^+: Für Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ der positive Anteil: $f^+ := \max\{f, 0\}$.

f^-: Für Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ der negative Anteil: $f^- := \max\{-f, 0\}$.

$P(\partial)$: Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Siehe 4.0.11.

$\mathcal{S}_P$: Symbol des Differentialoperators $P[\partial]$. Siehe 4.0.12.

$f \otimes g$: Direktes Produkt zwischen den Funktionen f, g. Siehe 5.2.2.

$u \otimes v$: Direktes Produkt zwischen den Distributionen $u, v \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$. Siehe 5.2.4.

$u * v$: Faltung der Distributionen $u, v \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$. Siehe 5.2.7.

Literatur

[1] *Distributions, Sobolev Spaces, Elliptic Equations*, D.D. Haroske, H. Triebel
EMS Textbooks in Mathematics, 2007

[2] *Theoretical and mathematical Physics*, V.S. Vladimirov, E.F. Mishchenko, A.K. Gushchin
AMS Bookstore, 1988

Index